15;444(3,3) F-208

HARVARD UNIVERSITY

LIBRARY OF THE

MINERALOGICAL
LABORATORY

UNIVERSITY MUSEUM

Transferred from the
Lib. of the Mus.Comp.Zool.

Digitized by Google

Beiträge

zur

Krystallonomie.

Von

F. E. Neumann.

Erſtes Heft.

Mit 12 Tafeln in Steindruck.

Berlin und Poſen.
Bei Ernſt Siegfried Mittler.
1823.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorrede.

In einer Reihe zwangloſer Hefte gedenke ich dem mineralogiſchen Publikum die Reſultate meiner kryſtallographiſchen Arbeiten zu übergeben. Ich glaubte den Anfang machen zu müſſen mit der Auseinanderſetzung der graphiſchen Methode, deren ich mich fernerhin in meinen Darſtellungen bedienen werde, und die, wie ich hoffe, den Beifall jedes Kryſtallforſchers erhalten wird. Bei der jetzt entſtehenden Mannigfaltigkeit der kryſtallographiſchen Terminologien in Deutſchland, kann eine Methode, die frei von jeder ſubjectiven Anſicht und Vorſtellung iſt, und zugleich dasjenige, was allen dieſen verſchiedenen Terminologien zum Grunde liegt, enthält, nicht überflüſſig ſein: — und ich wage zu hoffen, daß die verſchiedenen Richtungen der Betrachtungen unſerer Kryſtallographen in dieſer Methode ſich wieder vereinigen werden. Es ſind in dieſer graphiſchen Darſtellung eben ſo leicht die Hauyſchen Bezeichnungen der verſchiedenen Glieder eines Kryſtallſyſtems, als die vom Herrn Prof. Mohs und die vom Herrn Prof. Hausmann (welche beide im Weſentlichen nicht verſchieden von einander ſind), und vom Herrn Prof. Heſſel ꝛc. zu leſen.

Zum Grunde liegt dieſer Methode eine Anſicht, die in ſpätern Arbeiten erſt ſich geltend zu machen verſuchen wird, und von der ich überzeugt bin, daß ſie eben ſo ſehr dem phyſikaliſchen Verſtändniß der kryſtalliniſchen

Digitized by Google

Struktur und Geſtaltung dienen wird, als ſie die Möglichkeit einer dynamiſchen Conſtruction derſelben in ſich trägt, nämlich die Anſicht, die ſich davon losſagt, die Kryſtallflächen als Etwas urſprünglich Seiendes im Kryſtall zu betrachten, die dieſe nur als die Erſcheinung, das Reſultat der Thätigkeiten in den Flächenrichtungen (d. i. in den auf den Flächen ſenkrecht ſtehenden Richtungen) betrachtet.

Deshalb glaubte ich bei der Auseinanderſetzung der Methode zugleich die allgemeinen kryſtallonomiſchen Geſetze entwickeln zu müſſen, um zu zeigen, wie dieſe alle ſich unmittelbar auf die Richtungen beziehen. — Zugleich iſt in dieſem allgemeinen Theil Manches entwickelt, um mir bei den folgenden Lieferungen zur Baſis zu dienen, worauf ich bei den ſpeciellen Unterſuchungen verweiſen kann, zur Vermeidung unnützer Wiederholung.

Hieran wird ſich eine Reihe Unterſuchungen anſchließen, theils über den Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen und der ein- und eingliedrigen Syſteme im Allgemeinen, theils über die einzelnen Syſteme ſelbſt, kritiſch den Grad von Evidenz beleuchtend, den ihre Deutung in ſich trägt.

Nach dieſen mehr kritiſchen Unterſuchungen ſollen alle Reſultate kryſtallographiſcher Beobachtungen, ſo weit ſie zur öffentlichen Kunde gekommen ſind, in der graphiſchen Methode dargeſtellt werden. Durch ſie iſt es möglich geworden, in einigen Bogen bildlicher Darſtellungen und in einigen Bogen erläuternden Textes alles zu geben, was die Hauyſche Kryſtallographie in ihren voluminöſen Bänden nach Abſtreifung der atomiſtiſchen und hypothetiſchen Vorſtellungen an Thatſachen in ſich hat, und was andere Beobachter ſeitdem geleiſtet haben. Die

Digitized by Google

liberalſte Zuſicherung der Mittheilung und Unterſtützung des Hrn. Prof. Weiß hierbei, läßt den Leſer die möglichſte Vollſtändigkeit in den Angaben des Beobachteten erwarten, welche Vollſtändigkeit dieſe Beiträge auch fernerhin zu erhalten ſich beſtreben werden, indem alles, was ſpäter bekannt wird, in den ſpätern Heften jedesmal nachgeliefert werden ſoll, ſo daß dieſe Beiträge zugleich ein Repertorium aller kryſtallographiſchen Beobachtungen ſein werden. Mit dem zweiten Hefte, das noch in dieſem Jahre erſcheinen wird, ſoll dieſem Verſprechen genügt ſein.

Die zweite Abhandlung dieſes Heftes, die erſte von denen, die die zwei- und eingliedrigen Syſteme betreffen, ſteht in der nächſten Verbindung mit der folgenden, deren Gegenſtand die Entwickelung dieſer Syſteme in Bezug auf ihre Grundrichtungen iſt, ſo wie dieſe ſich mit der Entwickelung dieſer Syſteme in Bezug auf ihren Zonenzuſammenhang beſchäftigt. Sie iſt weſentlich polemiſch gegen die Darſtellung des Hrn. Prof. Mohs, und ich finde in dieſer Hinſicht für nöthig, zu bemerken, daß das Manuſcript dieſes Heftes ſchon im Sommer vorigen Jahres vollendet vor mir lag, ehe der Grundriß der Mineralogie von Hrn. Mohs erſchien; denn es ſcheint, daß Hr. Mohs in dieſem ſehr ſchätzbaren Werke den Weg gehen wird, den ſeine Methode konſequenterweiſe erfordert, daß er es aufgiebt, alle zwei- und eingliedrigen Syſteme als hemiprismatiſche zu betrachten, wozu ihn das Studium des Zonenzuſammenhanges, das leitende Princip ſeiner Methode auch nicht führen konnte. Daß Hr. Mohs dieſe Syſteme als hemiprismatiſche bezeichnete, war eine Inconſequenz, deren Folge der Streit war, der, ſeitdem ich dieſe Abhandlung ſchrieb, zwiſchen den Meiſtern der Kryſtallographie ſelbſt zur Sprache ge-

Digitized by Google

kommen iſt, und der mit dem jetzigen Schritte des Hrn. Prof. Mohs mir völlig entſchieden zu ſein ſcheint.

Einige Anmerkungen in dieſer Abhandlung, die ſich auf die Bezeichnungsmethode des Hrn. Mohs beziehen, bitte ich nicht ſo zu verſtehen, als mißbilligte ich dieſelbe überhaupt; ich glaubte nur auf die Willkührlichkeiten in derſelben bei dieſer Gelegenheit aufmerkſam machen zu müſſen. Ich halte jedoch dieſe Bezeichnungsart von allen denen, deren Baſis der äußere Zuſammenhang durch die Zonen ſein ſoll, für die gelungenſte, und finde es in allen den Fällen, wo die Aufgabe, die Bezeichnungen der Glieder zu den Grundrichtungen zu finden, noch nicht gelöſet iſt, ſehr zweckmäßig, ſich derſelben zu bedienen, — nur manche Nebenvorſtellungen, wie z. B. die der Reihen, halte ich hierbei für unweſentlich, ich ſehe in ihnen nur eine mathematiſche Abſtraction, und finde ſie nicht in der Natur gegeben.

Inhalt.

Seite

I. Methode, den Zuſammenhang der Glieder eines Kryſtallſyſtems und ihre gegenſeitigen Verhältniſſe graphiſch darzuſtellen.

Erſter Abſchnitt. Die graphiſche Darſtellung. . . 1

Zweiter Abſchnitt. Die Neigungsverhältniſſe in den Zonen im vorliegenden Schema zu finden. 19

Die Zonenbezeichnung. 42

Dritter Abſchnitt. Die Neigungsverhältniſſe in den Flächen durch das Schema zu finden. 51

Vierter Abſchnitt. Die Projection der Flächenorte auf jeder kryſtallonomiſchen Fläche zu entwerfen . . 78

Methodiſche Beſtimmung der Flächenorte des regulären Syſtems auf jeder kryſtallonomiſchen Fläche deſſelben. 103

Anhang. Stellung und Umkehrung der Methode. . . 115

II. Ueber den eigenthümlichen Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen Syſteme.

1) Ueber den eigenthümlichen Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen Syſteme in Beziehung auf ihren Zonenzuſammenhang. 121

Digitized by Google

Digitized by Google

Einleitung.

Das kryſtallographiſche Studium bezieht ſich im Allgemeinen auf zwei in der Betrachtung völlig geſchiedene Fragen; es bezieht ſich einmal auf den Zuſammenhang der verſchiedenen Glieder deſſelben Kryſtallſyſtems unter einander, und dann auf die Erforſchung der Individualität, der trennenden Eigenthümlichkeit in jedem der verſchiedenen Kryſtallſyſteme. Ehe dieſe zwei Fragen in ihrer Beſtimmtheit auftreten konnten, mußte ſich der Begriff eines Kryſtallſyſtems entwickeln. Ein Kryſtallſyſtem iſt der Inbegriff von Geſtaltungen, denen eine gemeinſchaftliche Einheit zu Grunde liegt. Es mußte alſo erſt erkannt werden, worin dieſe Einheit in der Mannigfaltigkeit der Geſtaltungen zu ſuchen ſei, wenn bei der Feſtſetzung eines eigenthümlichen, in ſich geſchloſſenen Kryſtallſyſtems nicht ein dunkeles Naturgefühl mehr als ein in ſich klarer Begriff leiten ſollte. Verwirrung mancherlei Art konnte nur entſtehen, wenn das, was ein unbeſtimmtes Gefühl ahnend unbeſtimmt hingeſtellt hatte, zur Baſis der weiter gehenden Reflexion wurde, wenn die Hauyſchen Dekreſcenz-Geſetze den Begriff der Einheit eines Kryſtallſyſtems darſtellen ſollten; — er ſtand ſo jeder mathematiſchen Willkühr offen, der die empiriſche Forſchung nur ſchwache Grenzen ſetzen konnte. — Der Ueberſetzer der franzöſiſchen Kryſtallographie, Herr Prof. Weiß, dieſen Vorwurf der Hauyſchen Darſtellung auf das Beſtimmteſte fühlend, erkannte den Zuſammenhang der verſchiedenen Glieder eines und deſſelben Syſtems in ihrer Abhängigkeit, wie dieſe ſich ausſpricht in ihrem Beſtimmtwerden durch Zonen. Das Studium der Abhängigkeit eines Gliedes von andern Gliedern, in denen die Zonenrichtungen ſchon gegeben waren, die das Glied beſtimmten, gewährte einen klaren

Begriff der Einheit eines Kryſtallſyſtems, und führte zu gewiſſen Anfangspunkten, von denen alle ſich einſetzende Abhängigkeit ausging, zu gewiſſen Mittelpunkten, an welche die mannigfaltigen Geſtaltungen in verſchiedenen Richtungen vermöge ihrer Zonenabhängigkeit ſich anſchloſſen. Dieſe Anfangspunkte traten als primäre Geſtalten an die Stelle der Hauyſchen Primitivformen; ſie dienten keiner Hypotheſe zur Baſis, waren durch keine einſeitige Deutung der Strukturverhältniſſe gegeben, ſondern waren durch die unbefangene Naturbeobachtung als Ausgangspunkte des in der Abhängigkeit erkannten Zuſammenhanges der verſchiedenen Glieder gegeben. Der Inbegriff von Geſtaltungen, die ihre Beſtimmung erhalten ſowohl durch die in den primären Geſtalten unmittelbar gegebenen Zonenrichtungen, als durch die, welche in den durch dieſe ſchon beſtimmten Geſtalten, und in den von dieſen auf dieſelbe Weiſe ſich weiter entwickelnden Geſtalten ſich einſetzen, iſt ein Kryſtallſyſtem.

So wurde das Studium des Zuſammenhanges in einem und demſelben Syſteme, der auf ganz allgemeinen, nicht in dem beſtimmten Syſteme ruhenden Verhältniſſen gegründet iſt, auf die Beobachtung ganz allgemeiner Verhältniſſe gewieſen, auf die Beobachtung der gemeinſchaftlichen Richtungen, wodurch die verſchiedenen Glieder in ihrem Zuſammenhange erſcheinen, d. i. auf die Beobachtung des Parallelismus der Kanten. Das Syſtem konnte unabhängig von allen Winkelmeſſungen in ſeiner Gliederung feſt begründet werden.

Jetzt trat die zweite Frage mit allen ihren Anforderungen nach der Individualität, nach der beſtimmenden Eigenthümlichkeit jedes beſondern Kryſtallſyſtems auf eine in ſich klare Weiſe hervor. Es ſchloß ſich dieſer Frage zunächſt die Unterſuchung der primären Formen an, als Repräſentanten der Richtungen, die der Entwickelung aller möglichen Geſtaltungen zu Grunde lagen. Dieſe Unterſuchung erkannte in vielen derſelben ein Gemeinſchaftliches, wodurch viele unter einander ſich eben ſo ſehr näherten, als ſie von den andern ſcharf getrennt wurden. Es

ergab ſich der Begriff einer höhern Einheit mehrerer Kryſtallſyſteme, der Begriff der Abtheilungen derſelben:

1) Das reguläre Syſtem, deſſen Primärform das reguläre Octaeder iſt.

2) Die viergliedrigen Syſteme, deren Primärformen Quadratoctaeder ſind.

3) Die zwei- und zweigliedrigen Syſteme, deren Primärformen Rhombenoctaeder ſind.

4) Die zwei- und eingliedrigen Syſteme, deren Primärformen doppelt dreiſeitige Pyramiden ſind, in welchen zwei Flächen gleich geneigt gegen die dritte ſind, aber verſchieden gegen einander *).

5) Die ein- und eingliedrigen Syſteme, deren Primärformen doppelt dreiſeitige Pyramiden mit dreierlei Neigungen in den drei Endkanten ſind **).

6) Die drei- und die ſechsgliedrigen Syſteme, deren Primärformen Rhomboeder oder Dihexaeder ſind.

Jetzt war die Anforderung, in jedem der Syſteme in den verſchiedenen Abtheilungen den Character der Eigenthümlichkeit, den Ausdruck der Beſonderheit aufzufinden.

Bereis im Jahre 1809 erſchienen vom Prof. Weiß zwei Diſſertationen ***), deren Tendenz war, dieſer Anforderung zu genügen. Derſelbe unterſchied damals ſchon die ſo eben ange-

---

*) In der zweiten Abhandlung dieſes Heftes iſt die Beziehung und Zonenabhängigkeit aller Glieder eines zwei- und eingliedrigen Syſtems von einer ſolchen Pyramide nachgewieſen; es iſt dort gezeigt, wie die Betrachtung des Zonenzuſammenhanges auf ſie als die einfachſte Geſtalt führt. Zugleich iſt aber auch eine naturgemäße Beziehung der Glieder auf ein ein- zwei- und einkantiges Octaeder, d. i. auf ein ſchiefes Octaeder, erörtert.

**) Die Belege, daß die Verfolgung des Zonenzuſammenhanges hier auf eine ſolche Pyramide, als den einfachſten Ausgangspunkt, führt, und daß von ihr aus derſelbe Gang der Entwickelung ſtatt findet, wie der bei der zwei- und einkantigen auseinandergeſetzte iſt, behalte ich mir vor, am Syſtem des Axinit, an dem ein- und eingliedrigen Feldſpath u. ſ. w., im folgenden Hefte zu geben.

***) De indagando formarum crystallinarum charactere geometrico principali. Lips. 1809.

Digitized by Google

gebenen Abtheilungen bis auf wenige Modificationen, die ich anzugeben für nöthig erachte, als Data der hiſtoriſchen Entwickelung der Kryſtallographie. — Die zwei- und eingliedrigen Syſteme wurden in dieſen Abhandlungen theils in die Abtheilung der zwei- u. zweigliedrigen Syſteme geſtellt, (z. B. das Syſtem der Hornblende, des Augit u. ſ. w.), theils wurde ihnen ein ſchiefes Octaeder (octaedron pyramidibus obliquis, non rectis, basi rectangula) als Primärform beſtimmt. Letztere ſowohl als die ein- und eingliedrigen Syſteme wurden von den übrigen vier Abtheilungen getrennt, und ihre nähere Erörterung bei einer andern Gelegenheit wurde verſprochen. — Beides, die Vereinigung der zwei- und eingliedrigen Syſteme mit den zwei- und zweigliedrigen, und ihre Trennung von dieſen durch die Feſtſtellung einer beſondern Primärform für ſie, war wahr, war in der Beobachtung gegründet, das vergleichende Studium des Zuſammenhanges führt auf Beides. Dieſes Räthſel der Doppelſinnigkeit konnte nicht mehr durch die Beobachtung des äußern Zuſammenhanges gelöſt werden, deren Ergebniſſe finden hier ihre Grenzen; es konnte nur gehoben werden durch ein tieferes Eindringen in den Grundcharakter der verſchiedenen Syſteme. — In den Schriften der Königl. Akad. der Wiſſ. zu Berlin, in den Jahrgängen von 1814 u. 1815 iſt die Abhandlung des Prof. Weiß, worin über die Natur der zwei- und eingliedrigen Syſteme und der ein- und eingliedrigen das wahre Verſtändniß gegeben wurde, welches dadurch erſt möglich ward, daß der Grundcharakter jedes Syſtems nicht mehr in gewiſſen Eigenſchaften ſeiner Primärform geſucht wurde, daß die Unterſuchung beim Gegebenſein einer Primärform ſich nicht beruhigte, ſondern daß dieſe ſelbſt erſt ihre Bedeutung in ihrer Beziehung zu gewiſſen Richtungen im Raume fand, ſo daß das Verhältniß dieſer Richtungen, die nicht einer einzelnen Form, nicht der Primärform zu Grunde liegen, ſondern der ganzen Mannigfaltigkeit und Möglichkeit von Geſtaltungen im Kreiſe eines Syſtems, den Grundcharakter eines jeden Syſtems beſtimmte.

Digitized by Google

Die Bedeutung und die Stellung der oben angegebenen Abtheilungen ſind das Reſultat dieſer bedeutendſten Arbeit in der Kryſtallonomie.

I. Die Syſteme, die auf dem Verhältniß dreier unter einander rechtwinkliger Richtungen beruhen:

1) Alle drei Richtungen ſind einander gleich. Reguläres Syſtem. Gleichaxiges Syſtem.

Hemiedriſche Geſtaltungen dieſer Abtheilung.

a. Tetraedriſche Hälften.

b. Pyritoedriſche Hälften.

c. (Granatdioedriſche Hälften.)

d. (Pyrito-Tetraedriſche Hälften.) *)

2) Zwei Richtungen ſind gleich, und verſchieden von der dritten. Zwei- u. einaxige Abth. Viergliedrige Syſt.

Hemiedriſche Geſtaltungen.

a. Zwei- und viergliedrige Syſteme.

b. Ein- und zwei- und viergliedrige Syſteme.

c. Tetraedriſch viergliedrige Syſteme.

3) Alle drei Richtungen ſind verſchieden. Ein- und ein- und einaxige Abth. Zwei- u. zweigliedrige Syſt.

Hemiedriſche Geſtaltungen.

a. Zwei- und eingliedrige Syſteme.

b. Ein- und eingliedrige Syſteme.

II. Die Syſteme, die auf dem Verhältniß einer Richtung gegen drei andere, auf der erſten ſenkrechte und unter ſich gleiche Richtungen beruhen.

4) Die drei- und einaxige Abth. Sechsgliedrige Syſt.

Hemiedriſche Geſtaltungen.

a. Die dreigliedrigen Syſteme.

---

*) Die beiden letztern Geſtaltungen ſind bis jetzt bloß erdachte; in der erwähnten Abhandlung hießen die granatdioedriſchen Hälften: gedrehte Leuzitoide. Mit dem Namen pyritotetraedriſche Hälften bezeichne ich die Geſtalten, die entſtehen, wenn in den pyritoedriſchen Hälften die Verhältniſſe des Tetraedriſchen hinzutreten, — oder wenn in den tetraedriſchen Hälften die Verhältniſſe des Pyritoedriſchen hinzutreten. Dieſelbe Geſtalt entſteht auch, wenn das Granatdioeder tetraedriſch oder pyritoedriſch wird.

Digitized by Google

Dieſe Zurückführung der Kryſtallgeſtalten auf dieſe einfachſten Richtungen im Raume, umfaßt die ganze Mannigfaltigkeit der kryſtalliniſchen Welt, und hat der Kryſtallonomie einen wahrhaft phyſikaliſchen Standpunkt gewonnen, und ſchon gewähren die neueſten Entdeckungen der Phyſik ihr die überraſchendſten Belege. Ein großes Feld der Unterſuchung, was die Kryſtallonomie auf das Klarſte erkannt hatte, hat in unſerer Zeit den Phyſikern ſich eröffnet, die Erforſchung der Seiten (latera) thätiger Richtungen.

Alle Unterabtheilungen nämlich der vier Hauptabth., beruhen in den Verhältniſſen der Seiten *) der kryſtalliniſchen Grundrichtungen, ſo wie die Hauptabtheilungen in dem Verhältniß der Richtungen ſelbſt beruhen. Es geſtattet der Raum einer Einleitung nicht, dieſe Verhältniſſe in den Seiten der Richtungen in den verſchiedenen Unterabth. auseinander zu ſetzen, nur, wie durch dieſe Analyſe der Geſtaltungen jenes Räthſel der zwei- und eingliedrigen Syſteme, das die Erforſchung der Zonenabhängigkeit nicht heben konnte, gelöſt iſt, und wie die, in der Erſcheinung noch dunkleren und räthſelhafteren Geſtalten der ein- und eingliedrigen Syſteme ihr klares Verſtändniß erhalten haben, ſei uns erlaubt, möglichſt kurz hier zu bemerken, da das in der erwähnten Abhandlung Geſagte wohl möchte mißverſtanden ſein.

In jeder der Richtungen in den zwei- und zweigliedrigen Syſtemen ſind durch ihre Beziehung zu den zwei andern ungleichen Richtungen, immer zwei gegenüberſtehende Seiten gleich, und verſchieden von den zwei andern ſich gegenüberſtehenden Seiten. Tritt nun eine Verſchiedenheit ein zwiſchen zwei ſich gegenüberſtehenden gleichen Seiten, ſo daß dieſelbe Verſchiedenheit auch in den zwei Enden derſelben Seiten ſtatt findet, (wodurch die Gleichheit der zwei Enden der Richtung nicht aufgehoben wird), ſo wird zugleich daſſelbe Verhalten in den Seiten der andern

*) Dieſe Verhältniſſe in den Seiten ſind beſonders auseinander geſetzt in der Abhandlung über die Bezeichnung der Flächen eines Kryſtallſyſtems, in Jahrg. 1816 u. 1817 der Schriften d. Berl. Acad.

Richtung, die jenen Seiten zugekehrt ſind, gefordert *), und der räumliche Ausdruck dieſes Verhaltens in den Seiten der zwei= u. zweigliedrigen Richtungen ſind die zwei= u. eingliedrigen Syſteme. Stellen wir die Ebene, in der die Seiten dieſer Richtungen liegen, vertikal, und tritt unter den Seiten der Richtungen, die in einer horizontalen Ebene liegen, dieſelbe Differenz noch hinzu, ſo ſind der räumliche Ausdruck die ein= und eingliedrigen Syſteme.

Die zwei= und eingliedrigen Syſteme entſtehen alſo nicht, indem die Hälften gleichartiger Flächen zwei= und zweigliedriger Syſteme wegfallen, and die ein= und eingliedrigen Syſteme ſind nicht als entſtanden zu denken dadurch, daß von jenen wiederum die Hälfte gleichartiger Flächen fortfiel, dem widerſpricht die Natur auf das Beſtimmteſte, ſondern ſie ſind der Ausdruck der angegebenen Differenzen, die ſich in den Seiten der zwei= und zweigliedrigen Richtungen eingeſetzt haben. Dieſe Differenz, Verſchiedenheit fordert in den verſchiedenen Syſtemen einen verſchiedenen Ausdruck, ſie ſteht nicht überall auf derſelben Stufe; bei ihrem erſten Auftreten gleichſam, wo ſie dem Verhalten der Richtungen der zwei= und zweigliedrigen Syſteme noch nahe liegt, erſcheint ihr Ausdruck auch noch im nächſten Zuſammenhang mit den zwei= und zweigliedrigen Syſtemen, je weiter aber die Differenz in den Seiten ſich geſteigert hat, je ſchärfer getrennt ſteht das Syſtem auch von dieſen. Daher die Doppelſinnigkeit dieſer Syſteme, auf die der Prof. Weiß bei ſeinen frühern Unterſuchungen geführt wurde, daß er einige Syſteme dieſer Abtheilung zu den zwei= und zweigliedrigen ſtellte, während er die andern, davon trennend, als eigenthümliche charakteriſirte.

Nachdem ſo die Natur der verſchiedenen Syſteme in ihren Beziehungen zu den ihnen zu Grunde liegenden Richtungen beſtimmt war, konnten auch die im Gange der Entwickelung ſich

*) In wiefern in den Seiten der dritten Richtung gleichfalls eine Differenz gefordert wird, ſoll an einem andern Orte nachgewieſen werden.

Digitized by Google

einſetzenden Glieder nur in Bezug auf dieſe Richtungen gedacht werden; es entſtand der Ausdruck, die Bezeichnung der verſchiedenen Glieder, indem das Verhältniß in den Grundrichtungen angegeben wird, das durch die Punkte beſtimmt wird, durch welche die Fläche gelegt, ihre Lage beſtimmt iſt. (S. Schriften d. Königl. Akad. zu Berlin 1816—1817.) Die Stellen in jedem Syſtem, die ſeinen Grundrichtungen entſprechen, werden durch keine ſeiner Geſtaltungen zurückgedrängt, treten conſtant als ſich beſonders auszeichnend im ganzen Gange der Entwickelung hervor, z. B. die Stellen der Ecken eines zwei- und zweikantigen Octaeders werden der Anſchauung durch keine Geſtaltung eines zwei- und zweigliedrigen Syſtems entrückt, und daſſelbe gilt von den Stellen der Ecken eines Rhomboeders und Dihexaeders. Daher iſt die Bezeichnung der Glieder durch ihre Beziehung zu den Richtungen, die d i e ſ e n Stellen entſprechen, zu den Grundrichtungen, eben ſo ſehr ein treues Abbild der äußern Geſtalt, als ſie in der Geſtaltung gegründet iſt. — In der ein- und ein- und einaxigen Abtheilung wird die in der Erſcheinung vorherrſchende Richtung c, und von den zwei andern Richtungen wird die kürzere a, die längere b genannt; in der zwei- und einaxigen Abtheilung iſt a = b, und in der gleichaxigen iſt a = b = c. Das Zeichen $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ ſagt, daß die Fläche gelegt werden muß durch $\frac{1}{m}a$, und durch $\frac{1}{n}b$ und durch $\frac{1}{p}c$. In den ſechsgliedrigen Syſtemen wird die Axe durch c, uud die drei andern auf ihr ſenkrecht ſtehenden Richtungen werden durch a bezeichnet, und die drei mittlern, zwiſchen ihnen liegenden Richtungen, durch s.

Digitized by Google

Methode, den Zuſammenhang der Glieder eines Kryſtalliſationsſyſtems und ihre gegenſeitigen Verhältniſſe graphiſch darzuſtellen.

Erſter Abſchnitt.

Die graphiſche Darſtellung.

§. 1.

Der Zuſammenhang der verſchiedenen Glieder eines Kryſtalliſationsſyſtems, der als das Beſtimmende für alle übrigen gegenſeitigen Verhältniſſe angeſehen werden muß, bleibt bei jeder Kryſtallbetrachtung das erſte und hauptſächlichſte Ziel des Erkennens. Ueber dieſen Zuſammenhang, ſeinem Weſen nach, beſtehend in dem lebendigen Wechſelverhältniß der Glieder, ſind uns bis jetzt nur leiſe Ahndungen erlaubt; er umfaßt die ganze tiefe Natur der Cohäſion — zu vergleichen der Weiſe, wie ſie in der Muſik dem Ohre ihre Geheimniſſe enthüllt.

§. 2.

Wie aber dieſer Zuſammenhang ſeiner Erſcheinung nach ſich offenbart, iſt zuerſt in ſeiner Allgemeinheit und Beſtimmtheit vom Herrn Profeſſor Weiß ausgeſprochen und nachgewieſen. Dieſer Zuſammenhang iſt ausgeſprochen im Geſetz der Zonenbeſtimmung.

Eine Zone nennt Hr. Prof. Weiß den Inbegriff von Flächen, die alle eine Richtung gemeinſchaftlich haben, die alle derſelben Linie parallel ſind. Solche Flächen ſchneiden ſich in parallelen Kanten, z. B. im ſphäroedriſchen Syſtem kennen wir eine Mehrheit von Flächen, die alle die Richtung der Octaeder-Kante gemein haben: die Granatoederfläche, einige Pyramiden-Octaederflächen, die Leuzitfläche und einige Leuzitoidflächen und die Würfelfläche haben alle die genannte Richtung gemeinſchaftlich.

Das Geſetz der Zonen beſteht nun darin: daß in der Entwickelung der verſchiedenen Glieder, jedes ſpätere Glied beſtimmt wird durch Zonen der frühern Glieder. Eine Fläche iſt beſtimmt durch zwei Zonen, in die ſie gehört, weil zwei Richtungen nur einer Ebene angehören können.

§. 3.

Die Bezeichnung der Flächen enthält die Elemente, deren einfachſte Combination uns erkennen läßt, ſowohl, ob eine Fläche in einer gekannten Zone liege, als auch, welches die Fläche ſei, die durch zwei bekannte Zonen beſtimmt wird. — Eine Zone iſt gekannt, wenn wir zwei Flächen, ihr angehörig, kennen. Soll der Ausdruck für eine Fläche, durch zwei bekannte Zonen beſtimmt, gefunden werden, ſo ſetzen wir im Allgemeinen vier Flächen voraus, die dieſe zwei Zonen beſtimmen:

$$\boxed{\frac{1}{m'}a : \frac{1}{n'}b : \frac{1}{p'}c} \qquad \boxed{\frac{1}{m_{\prime}}a : \frac{1}{n_{\prime}}b : \frac{1}{p_{\prime}}c}$$

und

$$\boxed{\frac{1}{m''}a : \frac{1}{n''}b : \frac{1}{p''}c} \qquad \boxed{\frac{1}{m_{\prime\prime}}a : \frac{1}{n_{\prime\prime}}b : \frac{1}{p_{\prime\prime}}c}$$

Aus ihnen entwickeln ſich, nach einem leicht überſehbaren Geſetz, die Hülfswerthe:

$$M = p'n'' - p'n'' \qquad M' = p_{\prime}n_{\prime\prime} - p_{\prime\prime}n_{\prime}$$
$$N = m'p'' - m'p'' \qquad N' = m_{\prime}p_{\prime\prime} - m_{\prime\prime}p_{\prime}$$
$$P = m'n'' - m'n'' \qquad P' = m_{\prime}n_{\prime\prime} - m_{\prime\prime}n_{\prime}$$

und aus dieſen beſtimmen ſich nach demſelben Geſetz die Werthe m, n, p für die Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$, die durch die zwei Zonen beſtimmt iſt:

$$m = PN' - P'N$$
$$n = MP' - M'P$$
$$p = MN' - M'N.$$

Dieſe Werthbeſtimmungen zu entwickeln, iſt ein einfaches Problem der analytiſchen Geometrie, nämlich einmal den Durchſchnitt zweier Ebenen zu finden, und dann durch zwei ſolcher Durchſchnitte von zwei Paaren von Ebenen, eine neue Ebene zu legen. Die hier gebrauchten Hülfsgrößen, M N P und M' N' P' beziehen ſich auf die Durchſchnittslinie von jedem Paare der Ebenen, ſind die Coordinaten derſelben in den, den Buchſtaben M, N u. ſ. w. entſprechenden Richtungen, wenn die Durchſchnittslinie durch den Mittelpunkt des Syſtems der drei rechtwinkligen Dimenſionen gelegt gedacht wird.

Ein Beiſpiel mag die Anwendung dieſer Methode noch erläutern. Es iſt der Ausdruck für die Fläche zu finden, die aus der Kantenzone des Granatoeders zugleich in einer Diagonalzone des Octaeders liegt, die eine Richtung mit $\boxed{a : c \; \infty b}$ und $\boxed{b : c \; \infty a}$ gemein hat, und zugleich mit $\boxed{a : b : c}$ und $\boxed{-b : c \; \infty a}$.

$$M = 1 \qquad M' = -2$$
$$N = 1 \qquad N' = 1$$
$$P = 1 \qquad P' = -1$$

$$m = 2$$
$$n = 1$$
$$p = 3.$$

Digitized by Google

Alſo iſt der geſuchte Ausdruck

$$\boxed{\tfrac{1}{2}a : b : \tfrac{1}{3}c}$$

für die Fläche, die die Eigenſchaft hat, daß ſie in die Kantenzone des Granatoeders und die Diagonalzone des Octaeders fällt.

§. 4.

Ob die Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ in die Zone der Flächen $\boxed{\frac{1}{m'}a : \frac{1}{n'}b : \frac{1}{p'}c}$ $\boxed{\frac{1}{m''}a : \frac{1}{n''}b : \frac{1}{p''}c}$ gehört, iſt aus der höchſt einfachen Bedingungsgleichung zu erſehen:

$$Mm + Nn = Pp.$$

Für die ſo eben in Betracht gezogene Diagonalzone des Octaeders z. B. hatten wir $M = -2$, $N = 1$, $P = -1$, und dieſe Werthe geben als Bedingungsgleichung:

$$2m - n = p.$$

Alle Flächen, deren Dimenſionswerthe m, n, p dieſer Gleichung entſprechen, liegen in der Diagonalzone des Octaeders, haben mit der Octaederfläche die Richtung ihrer Diagonale gemein. Von den beobachteten Flächen des ſphäroedriſchen Syſtems leiſten dieſer Gleichung Genüge:

$$\boxed{1 : 1 : 1}\ \boxed{\tfrac{1}{2} : 1 : \tfrac{1}{3}}\ \boxed{\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} : 1}\ \boxed{\tfrac{1}{3} : 1 : \tfrac{1}{5}}\ \boxed{1 : \tfrac{1}{2} : \infty}$$

$$\boxed{1 : -1 : \tfrac{1}{3}}\ \boxed{1 : -\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4}}\ \boxed{1 : -\tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{5}}\ \boxed{\infty - 1 : 1}$$

$$\boxed{-1 - \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3}}\ \boxed{-1 : -\tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2}}\ \boxed{-1 : -\tfrac{1}{3} : 1}.$$

Aus zwei ſolchen Bedingungsgleichungen:

$$Mm + Nn = Pp \quad \text{und}$$
$$M'm + N'n = P'p$$

laſſen ſich wiederum die Werthe m, n, p entwickeln, da es nur auf ihr gegenſeitiges Verhältniß ankömmt.

Digitized by Google

§. 5.

So einfach die Rechnung nun auch iſt, ſo wird ſie doch ſehr lang und ermüdend, wenn es gilt, ſowohl die Zonen alle zu kennen, die bis auf einen gewiſſen Punkt der Beobachtung ſich entwickelt haben, als auch von jeder einzelnen Zone die Geſammtheit der Flächen, die ſich in ihr ausgebildet haben, zu erfahren, und von jeder Fläche die Geſammtheit der Zonen, denen ſie angehört, zu kennen. Es wäre eine ſehr mühſame und lange Arbeit, den gedachten Forderungen im ſphäroedriſchen Syſteme mit den doch nur wenigen beobachteten Flächen zu genügen. — Was aber die Hauptſache iſt, ſo haben wir, wie alles nur einzeln und ſtückweiſe gewonnen iſt, durchaus kein Bild dadurch von dem ganzen Zuſammenhange und deſſen Verkettungen und Verzweigungen erhalten, ſondern müſſen das Ganze des Reſultats mehr dem Gedächtniß als der geometriſchen Anſchauung anvertrauen.

Die ganze Betrachtungsweiſe und die Methode der mathematiſchen Behandlung vorliegenden Gegenſtandes erleiden eine ungemeine Vereinfachung, wenn man ſtatt auf die Flächen des Syſtems, mehr auf ihre **Normalen**, d. h. **auf die Linien, die aus dem Mittelpunkte des Syſtems ſenkrecht auf die Flächen gezogen gedacht werden**, die Aufmerkſamkeit richtet.

Von der rein mathematiſchen Seite iſt dieſe Weiſe der Behandlung, daß für die Flächen ihre Normalen betrachtet werden, daß das Eine in die Stelle des Andern geſetzt wird, gänzlich gerechtfertigt, und von der Seite der phyſikaliſchen Betrachtung ſcheint nach unſerm jetzigen Standpunkte Alles dafür zu ſprechen, alle Verhältniſſe, wie ſie mit der Fläche auftreten, aufzulöſen in Verhältniſſe ihrer Normalen, alle Eigenthümlichkeiten des Kryſtalls in den verſchiedenen Richtungen als lineare Thätigkeiten derſelben anzuſehn. Denken wir z. B. an die Erſcheinungen des Blätterdurchganges, der jeder Kryſtallfläche, mehr

Digitized by Google

oder weniger hervortretend, entſpricht, an die Lichtreflexion dieſer Blätterdurchgänge u. a. m., ſo deutet dieſes Alles auf eine Thätigkeit, die ſenkrecht auf die Kryſtallfläche wirkt, d. h. in der Richtung ihrer Normale.

§. 6.

Hiernach ſpricht der Begriff der Zone ſich aus, als der **Inbegriff von möglichen Flächen, deren Normalen in Einer Ebene liegen.**

Dieſe Anſicht der Zonen giebt uns ein Mittel, die Geſammtheit der Zonen und ihren Zuſammenhang untereinander in einem geometriſchen Bilde darzuſtellen. Verlängern wir nämlich alle Normalen, bis ſie eine und dieſelbe Ebene durchſchneiden, ſo müſſen alle die Durchſchnittspunkte in einer geraden Linie liegen, die von ſolchen Normalen herrühren, die in einer Ebene liegen, und umgekehrt gehören alle Durchſchnittspunkte, die in einer geraden Linie liegen, ſolchen Normalen zu, die in einer Ebene liegen, und deren Flächen alſo in eine und dieſelbe Zone gehören. Es bedarf alſo zur Erforſchung aller exiſtirenden Zonen nur der Aufzeichnung der Durchſchnittspunkte der Normalen mit einer Ebene auf dieſe, und wir werden uns bald überzeugen, daß dieſes ſowohl eine ſehr einfache Operation iſt, als daß es auch bei der Aufzeichnung keiner geometriſchen Genauigkeit bedarf, um mit bloßen Augen oder mit Hülfe eines Lineals alle exiſtirende gerade Linien herauszufinden.

§. 7.

Zuerſt ſoll auseinander geſetzt werden, wie dieſe Durchſchnittspunkte auf der geraden Endfläche des Syſtems zu entwerfen ſind, die man zu dieſer Aufzeichnung, wegen der größern Einfachheit des Verfahrens, auch immer beibehalten wird, wenn nicht beſondere Rückſichten, wie wir ſolche ſpäter kennen lernen werden, andere Kryſtallflächen dazu beſtimmen.

Auf dieſer geraden Endfläche müſſen zuerſt zwei ſich recht-

Digitized by Google

winklig durchſchneidende gerade Linien gezogen werden, parallel den Dimenſionen a und b des Kryſtallſyſtems, oder drei unter 60° ſich ſchneidende, parallel den drei Dimenſionen des ſechs- oder drei-gliedrigen Syſtems, je nachdem das vorliegende Syſtem zu dieſer Abtheilung gehört, oder zu denen, deren Natur in den drei rechtwinkligen Dimenſionen eingeſchloſſen iſt. — Der Durchſchnittspunkt der gezogenen Linien gehört der Normale der geraden Endfläche; ſie ſteht ſenkrecht auf der Dimenſion c.

Die Normalen der Seitenflächen $\left|a \infty b \infty c\right|$ und $\left|b \infty a \infty c\right|$ ſind parallel mit den gezogenen Linien (die wir correſpondirend α und β nennen wollen), — treffen dieſe im Unendlichen. Von allen Flächen, die zwiſchen $\left|a \infty b \infty c\right|$ und der geraden Endfläche $\left|c \infty a \infty b\right|$ liegen, durchſchneiden die Normalen die gerade Endfläche in der Linie α, und daſſelbe gilt von den Flächen zwiſchen $\left|b \infty a \infty c\right|$ und $\left|c \infty a \infty b\right|$, in Beziehung auf die Linie β. Um nachzuweiſen, wie die Linie α von den Normalen der Flächen $\left|\frac{1}{m}a : c \infty b\right|$ geſchnitten wird, bedienen wir uns des Durchſchnitts (a, c) des Kryſtalls Fig. 1. AB iſt die Richtung c, CB die Richtung a, und AC die Diagonale der Fläche $\left|\frac{1}{m}a : c \infty b\right|$. Die Normale dieſer Fläche ſteht ſenkrecht auf ihrer Diagonale, iſt dargeſtellt durch BD. AE iſt # mit der Richtung a, iſt unſere Richtung α. Es wird gefragt nach der von der Normale BD auf α abgeſchnittenen Größe AE. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ABE ergiebt ſich

$$CB : AB = AB : AE \text{ d. i.}$$

$$\frac{1}{m}a : c = c : AE$$

$$AE = \frac{mc^2}{a}.$$

Digitized by Google

Würde nach den abgeſchnittenen Größen auf α für die Flächen $\boxed{\frac{1}{m}a : c \ \infty b}$, $\boxed{\frac{1}{p}a : c \ \infty b}$ u. ſ. w. gefragt, ſo werden dieſe $\frac{nc^2}{a}$, $\frac{pc^2}{a}$ u. ſ. w. ſein. S. Fig. 2. Wenn für die Neigungen der Flächen gegen die Axe die Sinuſſe, bei konſtanten Coſinuſſen, fortſchreiten, wie $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ u. ſ. w., ſo ſchreiten die Sinuſſe für die Neigungen der Normalen gegen die Axe fort, wie m, n, p u. ſ. w. Dieſe beiderlei Neigungen ſtehen in dem Verhältniß des gegenſeitigen Ergänzens zu einem rechten Winkel.

In Beziehung auf die Flächen $\boxed{\frac{1}{m}b : c \ \infty a}$ $\boxed{\frac{1}{n}b : c \ \infty c}$ $\boxed{\frac{1}{p}b : c \ \infty a}$ u. ſ. w. gilt ganz daſſelbe für die Linie β, auch von dieſer werden von den Normalen dieſer Flächen Stücke abgeſchnitten, die ſich verhalten wie m, n, p u. ſ. w. Hier iſt aber die Einheit, die dieſe Vervielfachungen erleidet, $\frac{c^2}{b}$, wie ſie in Bezug auf α war $\frac{c^2}{a}$. Nachdem dieſe Einheiten auf den Linien α und β aufgezeichnet ſind, bedarf es, zur Beſtimmung des Durchſchnitts der Normale irgend einer Fläche dieſer Zonen, nur einer Vervielfachung vom Mittelpunkt der ſich ſchneidenden Linien von α und β aus. Da es aber nur auf das Verhältniß der Größen $\frac{c^2}{a}$ und $\frac{c^2}{b}$ zur Höhe des Kryſtalls c ankömmt, ſo ſetzen wir dieſe Höhe = 1, und dann ſind uns die Einheiten auf α und β: $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$.

Wir haben hier bloß auf die Syſteme der drei rechtwink-

Digitized by Google

ligen Dimenſionen Rückſicht genommen; es ergiebt ſich aber von ſelbſt, daß in den ſechsgliedrigen und dreigliedrigen Syſtemen daſſelbe gilt für die Flächen, deren Normalen in einem der drei Hauptſchnitte liegen, was hier geſagt iſt für Flächen, deren Normalen in einem der zwei Hauptſchnitte liegen — und es bleibt uns überhaupt nur noch die Beſtimmung für ſolche Flächen, deren Normalen nicht in die Hauptſchnitte fallen.

§. 8.

Die Durchſchnittspunkte der Normalen nennen wir die *Flächenorte*. Im vorigen Paragraph beſtimmten wir die Flächenorte für $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ u. ſ. w. $\boxed{\frac{1}{m}b : c \infty a}$ u. ſ. w., wir fragen jetzt nach dem Flächenorte von $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c}$. Dieſe Fläche liegt in der Diagonalzone von $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ und $\boxed{\frac{1}{n}b : c \infty a}$. Die Diagonalzone von $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ iſt beſtimmt durch die Fläche $\boxed{b : \infty c \infty a}$, die Ebene der Diagonalzone geht durch den Mittelpunkt des Kryſtalls und durch eine Linie, die von der Normale der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ nach der Normale der Fläche $\boxed{b \infty c \infty a}$ gezogen iſt, die alſo den Flächenort von $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ mit dem Flächenort $\boxed{b \infty c \infty a}$ verbindet. S. Fig. 3, wo $m\frac{c}{a}$ der Flächenort von $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ iſt, und die aus dieſem Punkte mit β

parallel gezogene Linie AD die Verbindung beider Flächenorte iſt, weil der Flächenort von $\left|b \infty c \infty a\right|$ im Unendlichen der Richtung β liegt. Die Normale von $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c\right|$ liegt alſo in der Ebene, die vom Mitelpunkt des Syſtems durch AD gelegt iſt, ihr Flächenort alſo in der Linie AD. Da dieſe Fläche auch in der Diagonalzone von $\left|\frac{1}{n}b : c \infty a\right|$ d. h. zwiſchen $\left|\frac{1}{m}b : c \infty a\right|$ und $\left|a \infty b \infty c\right|$ liegt, ſo muß ihre Normale auch in einer Ebene liegen, die durch den Mittelpunkt des Syſtems und durch CD $\# \alpha$ gelegt iſt, alſo ihr Flächenort auch in der Linie CD liegen. Der Durchſchnittspunkt der Linien AD und CD iſt der geſuchte Flächenort.

Wir haben alſo zur Beſtimmung des Flächenortes von $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c\right|$ dieſe höchſt einfache Regel: *man beſtimme die Flächenorte für* $\left|\frac{1}{m}a : c \infty b\right|$ und $\left|\frac{1}{m}b : c \infty a\right|$ *errichte aus beiden Punkten ſenkrechte Linien, ſo iſt der Durchſchnittspunkt derſelben der verlangte Flächenort von* $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c\right|$.

Man wird ſich auch nach rein mathematiſchen Principien leicht Rechenſchaft von dieſer Regel geben können.

Zur Erläuterung des angegebenen Verfahrens dient Fig. 4; ſie giebt die Flächenorte für die gewöhnlich am Schwerſpath zu beobachtenden Flächen:

$\left|a : b : c\right|$ $\left|a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c\right|$

$\left|b : c \infty a\right|$ $\left|a : c \infty b\right|$

$|a : \frac{1}{2}c\ \infty b|$, $|a : \frac{1}{4}c\ \infty b|$ $|a : b\ \infty c|$
$|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b\ \infty c|$ $|c\ \infty a\ \infty b|$.

Der Ort 1 (1) gehört der Fläche $|a : b : c|$, und iſt beſtimmt worden durch den Durchſchnitt zweier Senkrechten, auf α in (1) und auf β in 1. Beides, 1(1) und 1 ſind Flächenorte für $|a : c\ \infty b|$ und $|b : c\ \infty a|$. Eben ſo iſt der Ort für $|a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c|$ beſtimmt durch die Senkrechte auf α und β in ($\frac{1}{2}$) und 1, welches die Flächenorte für $|a : \frac{1}{2}c\ \infty b|$ und $|b : c\ \infty a|$ ſind. Der Ort ($\frac{1}{4}$) gehört der Fläche $|a : \frac{1}{4}c\ \infty b|$. Die Linie von 0 nach 1 (1) enthält den Flächenort für $|a : b\ \infty c|$ aber in ihrer unendlichen Entfernung, da ſie aus den Diagonalzonen von $|a\ \infty b\ \infty c|$ und $|b\ \infty a\ \infty c|$, deren Orte im Unendlichen von α und β liegen. Der Ort 0 gehört der geraden Endfläche $|c\ \infty a\ \infty b|$.

Der eigentliche Zuſammenhang dieſer Glieder iſt nun mit einem Blick zu überſehen. Der Ort ($\frac{1}{2}$) iſt von 1 (1) und dem gegenüberſtehenden 1 durch zwei in ($\frac{1}{2}$) ſich kreuzende Zonenlinien beſtimmt; und auf gleiche Weiſe ($\frac{1}{4}$) durch zwei in ($\frac{1}{4}$) ſich kreuzende Zonenlinien von 1 ($\frac{1}{2}$) nach dem gegenüberſtehenden 1. Parallel der Linie von 0 nach 1 (1) können Linien gezogen werden von ($\frac{1}{2}$) nach dem gegenüberſtehenden 1 ($\frac{1}{2}$), und von (1) nach 1, ein Zeichen, daß auch dieſe Zonenlinien den Flächenort von $|a : b\ \infty c|$ enthalten, daß $|a : \frac{1}{2}c\ \infty b|$ $|-a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c|$ und $|a : c\ \infty b|$ $|b : c\ \infty a|$ Zonen bilden, in denen die Säulenfläche $|a : -b\ \infty c|$ liegt. Eben ſo können von (1) nach dem 1 ($\frac{1}{2}$) der andern Seite und von ($\frac{1}{2}$) nach 1(1) der andern Seite Linien gezogen werden, parallel mit der Linie, die den Flächenort von $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b\ \infty c|$ enthält, (die mit $\frac{1}{3}$($\frac{1}{2}$) bezeichnet iſt), ein Beweis, daß dieſe Fläche auch in den von den gezogenen Linien angegebenen Zo-

Digitized by Google

nen liegt. — Es bedarf weder eines geübten Auges, noch einer großen Genauigkeit bei der Zeichnung, um dieſe Eigenſchaften beim erſten Anblick derſelben abzuleſen, zumal da der geringſte Zweifel durch die angegebenen Zahlenverhältniſſe augenblicklich ſich berichtigt.

§. 9.

Nicht weniger einfach iſt das anzuwendende Verfahren bei den 6- und 3gliedrigen Syſtemen. Unterſcheiden wir drei nebeneinander liegende Dimenſionen durch a, $a^{\cdot}$, $a^{\cdot\cdot}$, und ihre entgegengeſetzten Enden durch $-a$, $-a^{\cdot}$, $-a^{\cdot\cdot}$, und eben ſo s, $s^{\cdot}$, $s^{\cdot\cdot}$ und $-s$, $-s^{\cdot}$, $-s^{\cdot\cdot}$, ſo benennen wir correſpondirend, S. Fig. 5, durch α, $\alpha^{\cdot}$, $\alpha^{\cdot\cdot}$, und σ, $\sigma^{\cdot}$, $\sigma^{\cdot\cdot}$ die Linien, die auf der geraden Endfläche ihnen parallel gezogen gedacht werden. Wir wiſſen, daß alle Flächenorte von Flächen der Art, wie $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a^{\cdot}}}$, in α liegen, und von ſolchen, wie $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{n}a^{\cdot} : \frac{2}{n}a^{\cdot\cdot}}}$, in $\alpha^{\cdot}$ liegen.

Soll nun der Ort einer Fläche wie $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a^{\cdot}}}$ beſtimmt werden, ſo machen wir wiederum Gebrauch von der Eigenſchaft dieſer Fläche, daß ſie in der Diagonalzone von $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a^{\cdot}}}$ und in der Diagonalzone von $\overset{c}{\boxed{\frac{2}{n}a : \frac{1}{n}a^{\cdot}}}$ liegt. Die Diagonalzone von $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a^{\cdot}}}$ iſt aber beſtimmt durch den Conflikt dieſer Fläche mit der Fläche

$\boxed{\overset{\infty c}{a^{\cdot} : a^{\cdot\cdot}}}$, die ſenkrecht auf $s^{\cdot}$ ſteht, deren Flächenort alſo im Unendlichen von $\sigma^{\cdot}$ liegt. Beſtimmen wir alſo den Flächenort von $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a^{\cdot}}}$, und ziehen mit $\sigma^{\cdot}$ aus dieſem eine parallele Linie, ſo liegt in dieſer der Ort für $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a^{\cdot}}}$. Dieſe mit $\sigma^{\cdot}$ parallele Linie ſteht aber ſenkrecht auf α, im Flächenort für $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a^{\cdot}}}$.

Daſſelbe erleidet Anwenduug in Bezug auf $\alpha^{\cdot}$, wo der Ort der Fläche $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{n}a^{\cdot} : \frac{2}{n}a^{\cdot\cdot}}}$ liegt, in deren Diagonalzone unſere vorliegende Fläche $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a^{\cdot}}}$ gleichfalls liegt. Dieſer Flächenort iſt auch auf der Fig. 5. $\frac{nc}{a^{\cdot}}$, und um die Diagonalzone zu beſtimmen, müſſen wir wiederum dieſen Ort mit dem Flächenort von $\boxed{\overset{\infty c}{a^{\cdot\cdot} : -a}}$ durch eine Linie verbinden; da die Fläche $\boxed{\overset{\infty c}{a^{\cdot\cdot} : -a}}$ aber ſenkrecht auf $s^{\cdot\cdot}$ ſteht, ihr Ort alſo im Unendlichen von $\sigma^{\cdot\cdot}$ liegt, ſo iſt dieſe Verbindung eine parallele Linie mit $\sigma^{\cdot\cdot}$ aus $\frac{nc}{a^{\cdot}}$, eine in $\frac{nc}{a^{\cdot}}$ auf $\alpha^{\cdot}$ errichtete ſenkrechte Linie; — in ihr liegt der Flächenort von $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a^{\cdot}}}$, —

Digitized by Google

er lag aber auch in der aus $\frac{mc}{a}$ auf α errichteten ſenkrechten Linie, er iſt alſo durch den Durchſchnittspunkt beider Senkrechten beſtimmt. So ergiebt ſich alſo dieſelbe einfache Regel zur Beſtimmmung des Flächenortes von $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a.}}$: — man ſchneide $\frac{mc}{a}$ auf α und $\frac{nc'}{a'}$ auf α' ab, errichte aus den Punkten $\frac{mc}{a}$ und $\frac{nc'}{a'}$ auf α und α' ſenkrechte Linien, ſo iſt deren Durchſchnittspunkt der verlangte Flächenort.

§. 10.

Um auch hier die Anwendung dieſer Regel zu erläutern, wählen wir als Beiſpiel das Quarzſyſtem. S. Fig. 6. Die hier beobachteten Flächen ſind:

$\overset{c}{\boxed{a : a}}$	$\overset{2c}{\boxed{a : a}}$	$\overset{3c}{\boxed{a : a}}$
$\overset{4c}{\boxed{a : a}}$	$\overset{c}{\boxed{a : \frac{1}{2}a}}$	$\overset{c}{\boxed{\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a}}$
$\overset{c}{\boxed{\frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a}}$	$\overset{c}{\boxed{\frac{1}{5}a : \frac{1}{6}a}}$	$\overset{\infty c}{\boxed{a : a}}$

Die in der Figur punktirten Linien müſſen parallel gedacht werden mit den Dimenſionen a, a', a', ſind unſre α, α', α'; auf ihnen iſt 0m, 0m' als Einheit $= \frac{c}{a} = \alpha$ genommen. Aus m und m' oder, wie wir uns allgemein ausdrücken, aus 1α und $1\alpha'$ Senkrechte gezogen, ſo iſt deren Durchſchnittspunkt 1(1) der Flächenort für $\overset{c}{\boxed{a : a}}$. Aus 2α und $2\alpha'$ errichtete Senkrechte ſchneiden ſich in 2(2), im Flächenort von

$\boxed{\overset{2c}{a : a}}$ u. ſ. w. Aus 3α und 4α errichtete Senkrechte ſchneiden ſich in 3(4), im Flächenort von $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a}}$ u. ſ. w. Der Flächenort von $\boxed{\overset{\infty c}{a : a}}$ liegt im Unendlichen der Linie durch 1(1) und 0.

Von den Sechs- und Sechskantner-Flächen ſind auf dem Schema nur von den Hälften dieſer Flächen die Orte aufgezeichnet, wie die Beobachtung ihr Vorkommen gelehrt hat, und zwar die linken Hälften; von der Lage der rechten Hälften wird man auf der Figur ſich leicht Rechenſchaft geben können, da ſie auch dieſe Eigenthümlichkeit des Quarzſyſtems treu wiedergiebt, ſie ſelbſt in eine rechte und in eine linke Hälfte zerfällt.

Der enge Zuſammenhang der verſchiedenen Glieder und deſſen vielfache Verzweigungen ſind in der Figur leicht und klar zu überſehen. Um nur Einiges hiervon hervorzuheben, ſo bemerken wir, wie die Fläche $\boxed{\overset{c}{a : \frac{1}{2}a}}$ in zwei abwechſelnden Kantenzonen des Dihexaeder $\boxed{\overset{c}{a : a}}$ liegt, in welchen zwei abwechſelnden Kantenzonen auch zwei an einander liegende Flächen der erſten ſechsſeitigen Säule liegen; die Verbindungslinie zweier aneinander liegenden Flächenorte 1(1) und 1(1) iſt eine Kantenzonenlinie des Dihexaeder $\boxed{\overset{c}{a : a}}$; zwei ſolcher abwechſelnden Kantenzonenlinien ſchneiden ſich in 1(2). — Linien in 1(1) ſenkrecht auf α ſind Diagonalzonenlinien des Dihexaeder $\boxed{\overset{c}{a : a}}$; zwei ſolcher abwechſelnden Diagonalzonenlinien ſchneiden ſich in 2(2); alſo liegt $\boxed{\overset{2c}{a : a}}$ in zwei abwechſelnden Diagonalzonen des Grund-Dihexaeder. — Zwei abwechſelnde

Digitized by Google

Kantenzonen des Dihexaeder $\boxed{\overset{c}{a : \tfrac{1}{2}a}}$ beſtimmen wiederum $\boxed{\overset{3c}{a : a}}$; und zwei abwechſelnde Diagonalzonen von $\boxed{\overset{2c}{a : a}}$ beſtimmen $\boxed{\overset{4c}{a : a}}$. So beſtimmt das Grund-Dihexaeder zwei andere Dihexaeder; das eine durch ſeine abwechſelnden Kantenzonen, das andere durch ſeine abwechſelnden Diagonalzonen, jenes beſtimmt wieder ein Dihex. durch ſeine abwechſelnden Kantenzonen, und dieſes eins durch ſeine abwechſelnden Diagonalzonen, — ein eben ſo einfacher als enger Zuſammenhang, der auf das Klarſte in dem Schema dargelegt iſt. — Die Flächen der Sechs- und Sechskantner betreffend, ſo ſehen wir, daß ſie alle in die Kantenzone des Grund-Dihexaeders gehören, und daß ihre Orte auf der Kantenzonenlinie nach ſehr gleichmäßig abgemeſſenen Intervallen beſtimmt ſind, nur daß wir eine Lücke bemerken zwiſchen 1(2) und 3(4), und dieſe Lücke würde ausgefüllt ſein durch den Ort der Fläche $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a}}$, eine bei andern Syſtemen beobachtete Fläche; ſie würde in der Kantenzone des Grund-Dihexaeders beſtimmt durch die Kantenzone von $\boxed{\overset{2c}{a : a}}$, ſo wie $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}a}}$ durch die Kantenzone von $\boxed{\overset{3c}{a : a}}$ und $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{5}a}}$ durch die Kantenzone von $\boxed{\overset{4c}{a : a}}$ beſtimmt wird u. ſ. w.

Ich übergehe, den weitern Zuſammenhang dem Leſer aufzuzählen; ohne Mühe wird er ihn nun ſelbſt verfolgen können.

Es muß überhaupt nun hinlänglich deutlich ſein, wie einfach, leicht und geſchwinde die Entwerfung eines ſolchen Schema's iſt, und wie denn mit einem Schlage in dieſem geometriſchen Bilde Alles zugleich gegeben iſt, was die oben angegebene analytiſche Methode nur mühſam, einzeln und ſtückweis

ge-

Digitized by Google

geben konnte, und die bei reichlich ausgebildeten Syſtemen doch am Ende bei großer Anſtrengung des Anſchauungsvermögens demſelben doch nicht alle Verzweigungen der Glieder, in Rückſicht ihres gegenſeitigen Zuſammenhanges, erkennen läßt.

§. 11.

Zum Schluß dieſes Abſchnittes gebe ich das Schema des regulären Syſtems mit ſeinen gewöhnlichern Gliedern, es dem Leſer zu vielfacher und ausgebreiteter Anwendung überlaſſend. Die Flächenorte ſind auf der Würfelfläche dargeſtellt. Fig. 7. ſtellt nur die Flächen dar, deren Normalen die Würfelfläche ſelbſt ſchneiden, nicht die, von denen ſie erſt in ihrer weitern Ausdehnung über ſich hinaus geſchnitten wird, wie ſolche Fig. 8 auch darſtellt, wo die Orte aller Flächen (nur der parallelen nicht), wo alſo für einen 48 Flächner die Orte ſeiner 24 Flächen angegeben ſind, wogegen in Fig. 7. nur die Orte der 8 Flächen dargeſtellt ſind, die ſich über der Würfelfläche erheben, die eine vier und vierkantige Ecke des 48 Flächner bilden. Die dargeſtellten Flächen ſind:

$a \infty a \infty a$ $\qquad$ $a : a \infty a$ $\qquad$ $a : a : a$

$a : \frac{1}{2}a \infty a$ $a : \frac{1}{3}a \infty a$	Pyramid. Würfel.
$a : a : \frac{1}{2}a$ $a : a : \frac{1}{3}a$	Leuzitoide.
$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : a$ $\frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a$	Pyr. Octaeder.
$a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$ $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a$ $a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a$	48 Flächner

Die dieſen Flächen entſprechenden Flächenorte wird man leicht aus der gewählten Bezeichnung derſelben erſehen können;

Digitized by Google

es iſt nämlich der Ort von der Fläche $\left| \frac{1}{m} a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{p} c \right|$ bezeichnet durch $\frac{n}{p}\left(\frac{m}{p}\right)$, — ſo daß die beiden Ordinaten $\frac{n}{p}\beta$ und $\frac{m}{p}\alpha$ des Punktes ihn bezeichnen. So kann man immer unmittelbar den Flächen-Ausdruck wieder aus dem Schema ableſen.

Wenden wir noch einen Augenblick unſere Aufmerkſamkeit auf Fig. 7., ſo iſt man ſehr überraſcht von der großen Einfachheit, die hier herrſcht, man glaubt eine Chladniſche Scheibe zu ſehn, mit Schwingungslinien, wo die Schwingungsknoten, als Gleichgewicht entgegengeſetzter Bewegungen, erſcheinen. Wir können nicht umhin, auf das einfache hier herrſchende Geſetz aufmerkſam zu machen. Mit dem Würfel und ſeinem Gegenkörper, dem Octaeder, ſind das Quadrat, und in demſelben die Diagonallinien (als Octaederkantenzonen-Linien) gegeben; unmittelbar durch dieſe Linien iſt der Mittelkörper, das Granatoeder, beſtimmt. Die Combination vom Würfel und Oktaeder ruft das Granatoeder hervor. Jetzt tritt das Granatoeder in Combination mit dem Würfel und Octaeder. Die Granatoederkantenzone beſtimmt in der Octaederkantenzone den Leuzitkörper $|a : a : \frac{1}{2}a|$. Zonen von Granatoederflächen nach gegenüberliegenden Octaederflächen, beſtimmen den gewöhnlichen Pyramidenwürfel $|a : \frac{1}{2}a \; \infty a|$, das niedere Leuzitoid $|a : a : \frac{1}{3}a|$, das Pyramidengranatoeder $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ und den 48 Flächner $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a|$. — So ſind durch die Combination vom Octaeder, Würfel und Granatoeder die gewöhnlichen Glieder faſt alle beſtimmt. — Sollen noch andre Glieder beſtimmt werden, ſo muß ein neues Glied in die Verbindungen eingehen, da durch Würfel, Octaeder, Granatoeder nicht mehr Beſtimmungen möglich ſind. Als neues, in die Combination eingehendes Glied, liegt

Digitized by Google

aber der Leuzitkörper, als der Körper, der nach dem Granatoeder zuerſt auftrat, am nächſten; ſeine Kantenzone beſtimmt das Pyramidenoctaeder $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : a|$ und den 48 Flächner $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a|$ und ſeine Combination mit den gegenüberſtehenden Granatoederflächen den Pyramidenwürfel $|a : \frac{1}{3}a \infty a|$ und das Pyramidenoctaeder $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{7}a|$ — und hiermit iſt der Kreis des Beobachteten geſchloſſen, aber die Combinationen des Leuzit bei weitem noch nicht erſchöpft. Es iſt hier nicht der Ort, dieſes weiter zu führen; was die weiteren Combinationen des Leuzit beſtimmen, liegt der weitern Entwickelung am nächſten.

In Fig. 8. ſind die vier Octaederflächenorte ausgezeichnet, damit man gleich die Flächen trennen kann, die nicht über der Würfelfläche, auf der die Entwerfung des Schema geſchah, liegen, ſondern über den andern Würfelflächen.

Zweiter Abſchnitt.

Verfahren, die Neigungs-Verhältniſſe in den Zonen im vorliegenden Schema zu finden.

§. 12.

Die große Thatſache iſt für die Wiſſenſchaft gewonnen, daß die Thätigkeit des Kryſtalls gedacht werden muß in den Dimenſionen des Syſtems, eine Thatſache, die das Licht der neuern Phyſik ſchon begrüßt hat, eine Entdeckung, die neben den größten Entdeckungen in der Phyſik ihre würdige Stelle hat. Von Kreisbogen darf fortan nicht mehr die Rede ſein in der Kryſtallonomie, nur von Verhältniſſen der Sinuſſe und Coſinuſſe der Neigungen, als der Hineinbildung, der Wiedererſcheinung der urſprünglichen Dimenſionen des Kryſtalls in die beſtimmte Neigung. Das iſt die phyſikaliſche Bedeutung dieſer Verhält-

Digitized by Google

niſſe von Sinus zu Coſinus. In den Kreisbogen darf man keine kryſtallonomiſche Geſetzlichkeit ſuchen; die Analyſis ſpricht ihre Verhältniſſe unter einander als transcendente aus.

Aus dem Geſetz der Zonen, dem Grundgeſetz aller kryſtallonomiſchen Entwickelung und Ausbildung ergiebt ſich ein zweites nicht weniger wichtiges und allgemein gültiges Geſetz für die Kryſtallonomie: den Verhältniſſen von Sinus zu Coſinus für alle kryſtallonomiſche Neigungen in derſelben Zone liegt ein gemeinſchaftliches irrationales Verhältniß zu Grunde, von welchem irrationalen Verhältniſſe jedem beſondern Neigungsverhältniß eine rationale Vervielfachung entſpricht.

So ſind für die Betrachtung dieſer Verhältniſſe dieſe zwei Theile derſelben weſentlich getrennt, ihr gemeinſchaftliches irrationales Grundverhältniß, und die rationalen Vervielfachungen deſſelben, und gerade in dieſer Trennung, ſtellen ſich dieſe Verhältniſſe auf unſerm Schema dar. Fig. 9. iſt das Schema des Topas, und die angegebenen Flächen ſind:

$a : b \ \infty c$	$a : \frac{1}{2}b \ \infty c$	$a : \frac{1}{3}b \ \infty c$	(Säulenflächen.)
$a : 2b \ \infty c$	$3a : 2b \ \infty c$	$b \ \infty a \ \infty c$	
$a : b : c$	$a : b : \frac{1}{2}c$	$a : b : \frac{1}{3}c$	Octaederflächen.
	$a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c$	$a : {}^{1}b : \frac{1}{3}c$	
$b : c \ \infty a$	$\frac{1}{2}b : c \ \infty a$	$b : \frac{1}{2}c \ \infty a$	Zuſchärfungen.
$\frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c \ \infty a$	$a : c \ \infty b$	$a : \frac{1}{3}c \ \infty b$	
		$c \ \infty a \ \infty b$	

Betrachten wir z. B. die Diagonalzone von $a : \frac{1}{3}c \ \infty b$ auf dem Schema, und bedenken, daß die Neigungsverhältniſſe der Flächen gegen eine gemeinſchaftliche Ebene die umgekehrten ſind von denen ihrer Normalen gegen dieſe gemeinſchaftliche Ebene, weil beiderlei Neigungen ſich zu einem rechten Winkel ergänzen: ſo ſehen wir, daß es ankommt auf die Beſtimmung

Digitized by Google

der Neigungsverhältniſſe der Normalen $\frac{1}{3}(\frac{1}{3})$, $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})$, $\frac{4}{3}(\frac{1}{3})$ gegen die Normale $(\frac{1}{3})$. Die Zonenlinie, in der dieſe Normalen die gerade Endfläche ſchneiden, ſteht in dieſem Fall ſenkrecht auf der Normale $(\frac{1}{3})$, iſt alſo die Sinuslinie für alle Neigungen dieſer Zone, wogegen die Normale $(\frac{1}{3})$ der allen Neigungen gemeinſchaftliche Coſinus iſt. Die einzelnen Theile der Sinuslinie oder Zonenlinie ſtehen untereinander in rationalen Verhältniſſen, da ſie nach dem Zonengeſetz beſtimmt ſind, wie man ſich leicht allgemein die Nachweiſung wird geben können. Das Verhältniß des Coſinus zur Sinuslinie iſt alſo das allen Neigungsverhältniſſen gemeinſchaftliche Grundverhältniß. Die Beſtimmung deſſelben iſt einfach; im vorliegenden Fall

$$\cos = \sqrt{[1 + \left(\tfrac{1}{3}\frac{c}{a}\right)^2]}$$

$$\sin = \frac{c}{b}.$$

Für die Normale $\frac{1}{3}(\frac{1}{3})$ iſt $\frac{1}{3}\frac{c}{b}$, für $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})$ iſt $\frac{2}{3}\frac{c}{b}$, für $\frac{4}{3}(\frac{1}{3})$ iſt $\frac{4}{3}\frac{c}{b}$ der beſondere Sinus, ſo daß wir für die Neigungen in der Diagonalzone von $\left|a : \tfrac{1}{3}c \;\infty b\right|$ gegen die durch den Mittelpunkt gelegte Fläche $\left|b \;\infty a \;\infty a\right|$ haben für:

$$\left|a : b : \tfrac{1}{3}c\right| \quad \left|a : \tfrac{1}{2}b : \tfrac{1}{3}c\right| \quad \left|a : \tfrac{1}{4}b : \tfrac{1}{3}c\right|$$

$$\sin : \cos = \sqrt{[1 + \left(\frac{c}{3a}\right)^2]} : \tfrac{1}{3}\frac{c}{b} \quad : \tfrac{2}{3}\frac{c}{b} \quad : \tfrac{4}{3}\frac{c}{b}$$

$$= \frac{b\sqrt{[3]}}{ac}\sqrt{[(3a)^2 + c^2]} : 1 \quad : 2 \quad : 4$$

Das allgemeine irrationale Grundverhältniß iſt alſo in dieſem Fall $\frac{b\sqrt{3}}{ac}\sqrt{[(3a)^2 + c^2]}, = \sqrt{3}b\sqrt{\left[\left(\frac{3}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right]}$ die rationalen Vervielfachungen ſind 1, 2, 4, die auf dem Schema unmittelbar in die Augen treten.

Digitized by Google

§. 13.

Nicht weniger einfach ſind dieſe Verhältniſſe zu erkennen bei ſolchen Zonen, die in keine zwei ſymmetriſche Hälften zerfallen, ſondern wo ein Unterſchied zwiſchen der vordern und hintern Hälfte oder rechten und linken Hälfte, wie in zwei und zweigliedrigen Syſtemen in allen Zonen dies der Fall iſt, in denen weder |a ∞ b ∞ c| noch |b ∞ a ∞ c| noch |c ∞ a ∞ b| liegt. Solche Zonen haben ihre nächſte Beziehung auf eine in ihnen liegende Fläche der horizontalen Zone, d. h. auf eine in ihnen liegende Säulenfläche. Auf unſerm Schema wäre z. B. eine ſolche Zone, die zwiſchen |a : c ∞ b| und |b : c ∞ a|; in ihr liegt die Säulenfläche |a : b ∞ c|, und es frägt ſich im Allgemeinen, welche Verhältniſſe ſtatt finden für die Neigungen der Flächen in dieſer Zone gegen die Säulenfläche |a : b ∞ c|. Dieſe Säulenfläche durch den Mittelpunkt des Syſtems gelegt, ſteht ſenkrecht auf der Zonenlinie zwiſchen |a : c ∞ b| und |b : c ∞ a|, und ſchneidet alſo dieſe Zonenlinie in einem Punkt, der beſtimmt wird, wenn man vom Mittelpunkt des Schema, vom Ort der geraden Endfläche eine Linie ſenkrecht auf die Zonenlinie zieht. Eine Linie vom Mittelpunkt des Syſtems nach dieſem Punkt gezogen, wird der Coſinus ſein für die Neigung einer Normale, die dieſe Zonenlinie ſchneidet, und der Abſtand des Punktes, in welchem ſie die Zonenlinie ſchneidet, von dem Punkt, wo der Coſinus die Zonenlinie ſchneidet, iſt der Sinus. Wir haben alſo auch hier *einen conſtanten Coſinus für die Neigungen der verſchiedenen Normalen gegen die Säulenfläche |a : b ∞ c|, nämlich die vom Mittelpunkte des Syſtems auf die Zonenlinie gezogene Senkrechte, und die Sinuſſe ſind die Abſtände der Flächenorte dieſer Zonenlinie von dem Punkt, in welchem ſie von der Senkrechten ge-*

Digitized by Google

troffen wird. Stehen dieſe Abſtände in einem rationalen Verhältniſſe? Die Zonenlinie zwiſchen (1) und 1 kann nach dem Zonengeſetz von den Flächenorten immer nur nach rationalen Verhältniſſen getheilt werden, was leicht nachzuweiſen iſt, (damit hängt zuſammen die Möglichkeit des Flächenausdrucks $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$), — und ſie iſt im vorliegenden Falle in $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$ getheilt, wenn wir von (1) an zählen, und das Stück zwiſchen (1) nnd 1 als Einheit nehmen. Es kommt hier alles darauf an, wie die aus dem Mittelpunkt des Schema auf die Zonenlinie gezogene Senkrechte dieſelbe theilt, ob die dadurch entſtandenen Theile in einem rationalen Verhältniſſe ſtehen, ob ra : rb ein rationales Verhältniß iſt. In dem rechtwinkligen Dreieck acb verhalten ſich aber die auf der Hypotenuſe ab vom Perpendikel cr abgeſchnittenen Theile wie die Quadrate der Katheten, in unſerm Fall alſo:

$$rb : ra = \left(\frac{c}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

Die abgeſchnittenen Theile ſtehen alſo in einem rationalen Verhältniß, da die Erfahrung ſich dahin entſchieden hat, daß die Verhältniſſe a : b : c nur durch Quadratwurzeln ſich ausſprechen, oder daß $a^2 : b^2 : c^2$ ein rationales Verhältniß iſt.

Um die speciellen Sinuſſe zu haben, müſſen wir alſo auf der vordern Seite zu $\frac{c^2}{a^2}$ rationale Theile von ab, d. i. rationale Theile von $\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}$ zuzählen und abziehn, und auf der hintern Seite zu $\frac{c^2}{b^2}$ gleichfalls rationale Theile von $\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}$ zuzählen oder abziehn.

§. 14.

So können wir nun den Werth des Verhältniſſes von sin. : cos. in einer beſtimmten Zone allgemein entwickeln. Es ſei

(Fig. 10.) ab irgend eine Zonenlinie, die durch $M\alpha$ und $N\beta$ beſtimmt iſt, die $M\alpha$ von der Richtung α und $N\beta$ vou der Richtung β abſchneidet, ſo iſt

$$\cos = \sqrt{[1 + cd^2]}$$

$$cd = \frac{MN\alpha\beta}{\sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2]}}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 + M^2N^2\alpha^2\beta^2]}}{\sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2]}}.$$

Da alle Sinuſſe nur rationale Theile von der Sinuslinie oder Zonenlinie ſind, und es alſo gleich iſt, welchen Theil wir zur Einheit nehmen, zur Beſtimmung des irrationalen Grund-verhältniſſes von sin. : cos., ſo wollen wir ab dazu beſtimmen,

$$ab = \sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2]}.$$

Benennen wir ab mit (sin.), weil die reellen Sinuſſe Theile von ab ſind, ſo haben wir cos. : (sin.) $= \sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 + M^2N^2\alpha^2\beta^2]} : M^2\alpha^2 + N^2\beta^2$, und wir ſind zu dem Ausdruck des irrationalen Grundverhält-niſſes dieſer Zone gekommen:

$$\sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 + M^2N^2\alpha^2\beta^2]} : 1 = MN\alpha\beta \sqrt{\left[\left(\frac{1}{M\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{N\beta}\right)^2 + 1\right]}$$

Wenn ſtatt α und β ihre Werthe $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$ geſetzt wer-den, ſo erleidet dieſes irrationale Grundverhältniß eine noch größere Vereinfachung:

$$MN\frac{c}{a}\frac{c}{b}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2c^2} + \frac{b^2}{N^2c^2} + 1\right]} : \frac{M^2c^2}{a^2} + \frac{N^2c^2}{b^2}$$

$$= MN\frac{c}{ab}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]} : \frac{M^2c^2}{a^2} + \frac{N^2c^2}{b^2}.$$

$$\cos : (\sin) = \frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]} : \frac{1}{MN}\left(\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}\right),$$

ſo daß das irrationale Grundverhältniß in ſeiner einfachſten Geſtalt folgendes iſt:

Digitized by Google

$$\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}+c^2\right]} : 1.$$

Es iſt von einer ſolchen Einfachheit, daß man füglich, da die Verhältniſſe a : b : c ſich gewöhnlich in kleinen Zahlen ausdrücken laſſen, von einem Ableſen dieſes Grundverhältniſſes aus dem Schema ſprechen kann.

§. 15.

Es iſt dieſer Ausdruck nichts anders als das Verhältniß der Zonenaxe zum Produkte der drei Dimenſionen des Kryſtalls. Das gemeinſchaftliche Grundverhältniß für alle Neigungen der Flächen einer Zone iſt das Verhältniß der allen Flächen dieſer Zone gemeinſchaftlichen Richtung, d. i. der Axe dieſer Zone, zum Produkte der drei Dimenſionen des Syſtems. Dieſe Behauptung in dieſer Allgemeinheit ausgeſprochen, bedarf noch einer nähern Erörterung und eines ſchärfern Beweiſes. Zuerſt, daß $\sqrt{\left[\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{N^2}+c^2\right]}$ die Zonenaxe iſt, und zwar in der Länge, die ihr zukommt vom Mittelpunkt des Syſtems bis zur geraden Endfläche, kann auf eine einfache Weiſe aus unſerm Schema nachgewieſen werden. Die Zonenaxe iſt auf der Zonenebene eine ſenkrechte Richtung; die Zonenebene iſt im vorliegenden Fall dadurch beſtimmt, daß ſie durch die Zonenlinie ab Fig. 11. und den Mittelpunkt des Syſtems gelegt iſt. Bezeichnen wir dieſen Mittelpunkt mit 0, ſo iſt zunächſt die Aufgabe, zu beſtimmen, wo die durch 0 auf 0ab ſenkrecht gezogene Richtung die gerade Endfläche ſchneidet. Da die Zonenlinie beſtimmt iſt durch die auf α und β abgeſchnittenen Stücke $M\alpha$ und $N\beta$, ſo ſchneide man auf dem entgegengeſetzten α und β die Stücke $\frac{1}{M\alpha}$ = cf und $\frac{1}{N\beta}$ = ce ab, errichte aus f und e ſenkrechte Linien auf α und β, ſo iſt deren Durchſchnittspunkt g die verlangte Beſtimmung, wo die durch den Mittelpunkt des Syſtems

gelegte Zonenaxe die gerade Endfläche ſchneidet. Denn 0f hat zur Axe des Syſtems eine Neigung, deren Tangente $= \frac{1}{M\alpha}$, ſteht alſo ſenkrecht auf 0a, deſſen Neigung durch die Tangente $= M\alpha$ beſtimmt iſt. Aus demſelben Grunde ſteht 0e ſenkrecht auf 0b. Die auf α in f gezogene ſenkrechte Linie fg ſteht zugleich ſenkrecht auf 0f, alſo ſenkrecht auf der Ebene a0f, folglich ſteht die durch 0f und fg gelegte Ebene ſenkrecht auf 0a — alſo auch 0g ſenkrecht auf 0a. Aus gleichen Gründen ſteht die Ebene 0eg ſenkrecht auf 0b, alſo 0g auch ſenkrecht auf 0b. Da alſo 0g ſenkrecht auf 0a und 0b ſteht, ſo ſteht 0g ſenkrecht auf der Ebene a0b.

Die drei Ordinaten des Punktes g ſind 0c, cf, ce, dieſe ſtehen in dem Verhältniß

$$1 : \frac{1}{M\alpha} : \frac{1}{N\beta} =$$

$$1 : \frac{a}{Mc} : \frac{b}{Nc} =$$

$$c : \frac{a}{M} : \frac{b}{N}.$$

Alſo iſt die Länge dieſer Linie 0g, dieſe Länge der Zonenaxe

$$= \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{M} + c^2\right]}.$$

§. 16.

Nun aber müſſen wir uns noch ſichern gegen den Vorwurf eines unbeſtimmten Sprachgebrauchs. Denn wenn wir vom Verhältniß einer Richtung zu einem Andern ſprechen, ſo können wir nur den arithmetiſchen Werth, alſo nur eine gewiſſe Länge dieſer Richtung meinen, und ſprechen wir von einer gewiſſen Länge dieſer Richtung, ſo haben wir Unrecht, ſtatt dieſes Theils der Richtung uns der Richtung ſelbſt im Ausdruck zu bedienen, wenn nicht etwa dieſer Theil als ein ganz beſonderer charakteriſirt wäre. Wir haben aber guten Grund, die Sache ſo zu neh-

Digitized by Google

men, indem wir ein allgemeines Geſetz der Kryſtallonomie geltend machen, in Beziehung auf die kryſtallonomiſchen Größen kryſtallonomiſcher Richtungen. Jeder ſolcher Richtung entſpricht eine irrationale Grundzahl, ſo daß für die verſchiedenen kryſtallonomiſchen Ausdehnungen, Längen dieſer Richtung nur rationale Vielfache dieſer irrationalen Grundzahl ſtatt finden. Hiedurch iſt der ſcheinbar unbeſtimmte Ausdruck: „das Verhältniß einer Richtung zu einem Andern," ſehr ſcharf beſtimmt; alle einzelne Längen ſind nur Theile der Richtung, nur Theile dieſer irrationalen Grundzahl der Richtung, und ſolche eben meinen wir nicht in unſerm Ausdruck, ſondern die Richtung ſelbſt, deren arithmetiſche Form die Grundzahl dieſer Richtung iſt.

Jede mögliche Kante in der von uns betrachteten Zone, und jede mögliche kryſtallonomiſche Ausdehnung derſelben iſt nur ein rationales Vielfaches von $\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}+c^2\right]}$. Es wird hier hinlänglich ſein, dieſes nachzuweiſen für den Fall, wo die Richtung dieſer Kanten durch den Mittelpunkt des Syſtems gelegt iſt — wo alſo nur nachzuweiſen iſt, daß die Länge dieſer durch den Mittelpunkt gelegten Richtung, die von der Fläche $\boxed{\frac{r}{m}a : \frac{r}{n}b : \frac{r}{p}c}$ abgeſchnitten wird, ein rationales Vielfaches von $\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}+c^2\right]}$ iſt, denn anders als durch Flächen in einer kryſtallonomiſchen Lage kann keine Richtung im Kryſtall begrenzt werden.

Aus der in Fig. 11. im vorigen §. gegebenen Conſtruction für die Beſtimmung des Punktes g, in welchem die durch den Mittelpunkt gelegte Zonenaxe die gerade Endfläche ſchneidet, folgt, wenn wir die Richtung c mit z, die Richtung a mit x und b mit y bezeichnen, die Gleichung für die Zonenaxe

$$x = \frac{1}{M\alpha} z = \frac{a}{Mc} z$$

$$y = \qquad \frac{b}{Nc} z.$$

Die Gleichung für die Fläche $\boxed{\frac{r}{m} a : \frac{r}{n} b : \frac{r}{p} c}$ iſt:

$$\frac{m}{a} x + \frac{n}{b} y + \frac{p}{c} z + r = 0.$$

Für den Durchſchnittspunkt der Axe mit dieſer Ebene ergeben ſich die Ordinaten

$$x = \frac{\frac{ra}{M}}{\frac{m}{M} + \frac{n}{N} + p}$$

$$y = \frac{\frac{rb}{N}}{\frac{m}{M} + \frac{n}{N} + p}$$

$$z = \frac{rc}{\frac{m}{M} + \frac{n}{N} + p}$$

Die abgeſchnittene Länge der Zonenaxe iſt $= \sqrt{[x^2 + y^2 + z^2]}$

$$= \frac{r \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]}}{\frac{m}{M} + \frac{n}{N} + p}$$

iſt alſo ein rationales Vielfaches von dem der Richtung entſprechenden Ausdrucke $\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]}$ *).

---

*) Aus dem Schema hätte ſich dieſer Werth natürlich auch entwickeln laſſen, aber die Darſtellung würde weniger einfach geworden ſein, wegen des Gebrauchs mehrerer Zeichnungen.

Hierauf gründen ſich die verſchiedenen Bezeichnungsarten der Kryſtallflächen, die Hauyſche, die vom Dr. Heſſel, die vom Prof. Mohs u. ſ. w., deren weſentlicher Unterſchied nur darin beſteht, daß ſie andere Richtungen im Kryſtall hervorheben, und durch deren (rationale) Theile die Lage der Flächen bezeichnen.

§. 17.

Wir wenden uns jetzt zur allgemeinen Beſtimmung der ſpeciellen Neigungsverhältniſſe, nachdem wir gezeigt haben, daß das Grundverhältniß für jeden Kantenwinkel das Verhältniß der Kantenrichtung zum Produkt der drei Dimenſionen des Kryſtalls iſt. Nennen wir das Grundverhälniß $\frac{A}{abc}$, ſo hatten wir §. 14.

$$\cos : (\sin) = \frac{A}{abc} : \frac{1}{MN}\left(\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}\right),$$

und dies war das Verhältniß des cos zu der beſtimmten Länge der Sinuslinie ab Fig. 12. Um nun den ſpeciellen Sinus für die Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c}$, deren Ort in p iſt, zu haben, müſſen wir angeben, der wie vielſte Theil die Entfernung dp iſt von der Linie ab = L

$$ad = \frac{\frac{M^2}{a^2}}{\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}} L$$

$$ap = \frac{M - m}{M} L, \quad M - m = \frac{nM}{N.}$$

$$dp = ad - ap = \left(\frac{\frac{M^2}{a^2}}{\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}} - \frac{M-m}{M}\right) L.$$

Digitized by Google

$$dp = \frac{(m - M)\frac{N^2}{b^2} + \frac{mM^2}{a^2}}{M\left(\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}\right)}$$

$$dp = \frac{\frac{mM}{a^2} - \frac{nN}{b^2}}{\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}} L.$$

Mit dieſem Werth das dem (sin) entſprechende Glied in dem Verhältniß $\frac{A}{abc}$: (sin) multiplicirt, erhalten wir den des Verhältniſſes für die Neigung der Normale von $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c}$

$$\cos : \sin = \frac{A}{abc} : \frac{m}{Na^2} - \frac{n}{Mb^2}.$$

Alſo für das Neigungsverhältniß der Fläche ſelbſt gegen die Säulenfläche $\boxed{\frac{1}{m}a : -\frac{1}{n}b \;\infty\; c}$

$$\sin : \cos = \frac{A}{abc} : \frac{m}{Na^2} - \frac{n}{Mb^2}$$

ein gewiß eben ſo einfacher als für den Gebrauch des Schema bequemer Ausdruck.

Wenn hier aber nur gezeigt iſt, daß für die Neigungen in einer Zone gegen die in dieſer Zone liegende Säulenfläche rationale Vervielfachungen eines irrationalen Grundverhältniſſes ſtatt finden — ſo läßt ſich von hier aus leicht überſehen, wie dann auch für alle möglichen kryſtallonomiſchen Neigungen daſſelbe ſtatt findet. Denn die Neigung irgend zweier Flächen unter einander iſt anzuſehen als die Summe oder Differenz ihrer Neigungen gegen die in dieſe Zone gehörige Säulenfläche; wenn aber für die Theile eines Winkels die geſagte Eigenſchaft gilt, ſo gilt ſie auch für die Summen dieſer Theile.

Denn es ſei $\angle A = a \pm \alpha$

$$\text{tng } a = m\sqrt{\left(\frac{1}{A}\right)}$$

$$\text{tng } \alpha = n\sqrt{\left(\frac{1}{A}\right)}$$

$$\text{tng } A = \frac{(m \pm n)\sqrt{(A)}}{A \pm mn.}$$

Es iſt alſo auch die Tang von der Summe der Winkel ein rationales Vielfaches von demſelben irrationalen Grundverhältniß, von welchem die Winkel ſelbſt rationale Vielfache ſind.

§. 18.

Erläutern wir das Gefundene durch einige Anwendungen. Fig. 9. iſt das Schema für das Syſtem des Topas. S. §. 12. Wir bedürfen der numeriſchen Verhältniſſe a : b c, um die Winkelverhältniſſe in den Zonen angeben zu können. Annäherungsweiſe gilt uns für dieſes Verhältniß: *)

$$a : b\ c = \sqrt{(5)} : \sqrt{(15)} : \sqrt{(16)}.$$

*) Herr Prof. Mohs giebt in ſeiner Charakteriſtik des naturhiſtoriſchen Mineralſyſtems 2te Aufl. Dresden 1821 für das Syſtem des Topaſes in dem von den Flächen $\overline{|a : b : \tfrac{1}{2}c|}$ gebildeten zwei und zweikantigen Octaeder folgende als mit dem Reflexionsgoniometer gemeſſene Winkel an: in der Kante (a,c) 141°7′, (b,c) 101°52′ und (a,b) 90°55.

Um aus dieſen Angaben unmittelbar die Verhältniſſe a : b : c zu finden, hat man, wenn A den halben Winkel der Kante (b,c), B den der Kante (a,c) und C den halben Winkel der Kante (a,b) bezeichnet, das Verhältniß:

$$a^2 : b^2 : c^2 = \sec^2 A : \sec^2 B : \sec^2 C.$$

Nicht ohne Vortheil wird man ſich auch in Fällen der Art, ſolche Verhältniſſe zu entwickeln, der Methode unſers Schemas bedienen. Fig. 13. ſeien aa, aa die Flächenorte des Octaeders, in ihm verhalten ſich $a : b : c = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$, ſo iſt $cb = \frac{x}{z}$, $cd = \frac{y}{z}$

In der Zone von $\boxed{a : c \infty b}$ nach $\boxed{b : c \infty a}$ liegen die Flächen $\boxed{a : b : \frac{1}{2}c}$ $\boxed{a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c}$ $\boxed{— a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c}$. Sollen für die Zone die Winkelverhältniſſe beſtimmt werden, ſo haben

wir

und $\frac{x^2 + z^2}{y^2} = tng^2 B$, $\frac{y^2 + z^2}{x^2} = tng^2 A$, $\frac{x^2 + y^2}{z^2} = tng^2 C$,

alſo $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^2} = 1 + tng^2 B$, $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2} = 1 + tng^2 A$,

$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = 1 + tng^2 C$,

$$\text{alſo } \frac{1}{x^2} : \frac{1}{y^2} : \frac{1}{z^2} = sec^2 A : sec^2 B : sec^2 C$$

$$a^2 : b^2 : c^2 = sec^2 A : sec^2 B : sec^2 C.$$

Die Relation dieſer drei Winkel unter einander iſt die, daß **die Summe der Quadrate, der Coſinuſſe, der halben Kantenwinkel eines Octaeders, eine conſtante Größe iſt**, $= 1$

$$cos^2 A + cos^2 B + cos^2 C = 1,$$

wie ſich aus den angegebenen Werthen für tng A, tng B, tng C leicht erſehen läßt. (Nennen wir die doppelten Winkel A′, B′, C′, ſo iſt:

$$cos A' + cos B' + cos C' = - 1.)$$

Hieraus entwickelt ſich $cos^2 C = 1 - cos^2 A - cos^2 B$

$$cos^2 C = - cos (A + B) cos (A - B),$$

d. h. der Coſinus von einem der drei Winkel iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Coſinus der Summe und dem Coſinus der Differenz der beiden andern. Dieſer Ausdruck empfiehlt ſich beſonders zur Prüfung, ob die Winkelangaben unter einander übereinſtimmen, wie dies z. B. bei den vom Prof. **Mohs** angegebenen Winkeln beim Staurolith S. p. 181. Charakteriſtik d. nathiſt. Minrlſt. **nicht der Fall** iſt, wo aus $A = 40°22'$ $B = 65°57'$ für $C = 59°47$ ſich ergiebt, ſtatt der dortigen $62°24'$.

Das Verfahren, deſſen ich mich bediene, nun in $a^2 : b^2 : c^2 = \frac{1}{cos^2 A} : \frac{1}{cos^2 B} : \frac{1}{cos^2 C}$ die numeriſchen Werthe in den möglichſt kleinſten Zahlen zu beſtimmen, beſteht in der Anwendung der Theorie der Kettenbrüche. Aus

$$\frac{1}{cos^2 A} : \frac{1}{cos^2 B} : \frac{1}{cos^2 C} = 2{,}5177 : 9{,}0188 : 8{,}128$$

iſt leicht zu ſehen, daß das Verhältniß $a^2 : b^2$ zwiſchen $1 : \frac{7}{2}$ und $1 : \frac{11}{3}$ fällt, die dazwiſchen liegenden Verhältniſſe, in der Folge wie ſie in den kleinſten Zahlen ſich ausdrücken laſſen, ſind:

Digitized by Google

wir M = 1 und N = 1, alſo $A = \sqrt{[5 + 16 + 18]} = \sqrt{39}$, und daher als Grundverhältniß dieſer Zone

$$\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{[5 . 16 . 18]}},$$

und als allgemeine Form aller möglichen Verhältniſſe dieſer Zone

$$\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{5} . \sqrt{16} \sqrt{18}} : \frac{m}{5} - \frac{n}{18} = \tfrac{3}{4}\sqrt{[5 . 2 . 39]} : 18m - 5n,$$

alſo für:

$\boxed{a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c}$	$\frac{3}{4}\sqrt{[5 . 6 . 13]}$	: $\frac{8}{3}$,	da	$m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$,
$\boxed{a : b : \frac{1}{2}c}$	„ „ „ „	: $\frac{13}{2}$,	„	$m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$,
$\boxed{a : \infty b : c}$	„ „ „ „	: 18,	„	$m = 1$, $u = 0$,
$\boxed{\infty a : b : c}$	„ „ „ „	: − 5,	„	$m = 0$, $n = 1$,
$\boxed{- a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c}$	„ „ „ „	: − $\frac{38}{3}$,	„	$m = - \frac{1}{3}$, $n = \frac{4}{3}$.

$$\frac{7}{2} \qquad \frac{11}{3}$$

$$\frac{7 + 11}{2 + 3.}$$

$$\frac{2.7 + 11}{2.2 + 3.}$$

denn, wenn $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ zwei Brüche, in ihren kleinſten Zahlen ausgedrückt ſind, ſo iſt der zwiſchen ihnen liegende Bruch, der mit den möglichſt kleinſten Zahlen geſchrieben wird, $\frac{m + m'}{n + n'}$. Wir haben alſo, für a : b als erſten angenäherten Werth 1 : $\frac{18}{5}$, als zweiten 1 : $\frac{25}{7}$ u. ſ. w., da der eigentliche des größern Zahlenverhältniſſes zwiſchen 1 : $\frac{7}{2}$ und 1 : $\frac{18}{5}$ liegt, wie ſich aus der Reihe der Kettenbrüche leicht überſehen läßt. Der Werth a : c liegt zwiſchen 1 : $\frac{13}{4}$ und 1 : $\frac{16}{5}$; der erſte angenäherte Werth würde alſo $\frac{29}{9}$ ſein. Annäherungsweiſe hätten wir alſo:

$$a : b : c = 1 : \sqrt{\tfrac{25}{7}} : \sqrt{\tfrac{29}{9}}.$$

Dies Verhältniß giebt den Winkel der Säule $\boxed{a : b \ \infty c}$ 124°14′ ſtatt des Mohsſchen 124°19′, und den Kantenwinkel (a,c) 141°4′ ſtatt 141°7′. Da indeſſen dieſe Verhältniſſe doch auf keine Congruenz mit der Natur Anſpruch machen können, ſo wählen wir hier die einfacheren $\sqrt{5} : \sqrt{18} : \sqrt{16} = a : b : c$.

Digitized by Google

In der Zone von $|a : c \;\; \infty b|$ nach $|b : \tfrac{1}{2}c \;\; \infty b|$ liegen die Flächen $|a : b : \tfrac{1}{3}c|$ $|-a : \tfrac{1}{2}b : \tfrac{1}{3}c|$ $|-a : b : c|$, für ſie iſt $N = \tfrac{1}{2}$ und $M = 1$, alſo ihr Grundverhältniß $\frac{A}{abc}$

$$= \frac{\sqrt{[5 + 4.18 + 16]}}{\sqrt{[5.18.16]}} = \frac{\sqrt{93}}{\sqrt{[5.18.16]}}.$$

$$\frac{A}{abc} : \frac{m}{Na^2} - \frac{n}{Mb^2} = \frac{\sqrt{93}}{\sqrt{[5.18.16]}} : \frac{2m}{5.} - \frac{n}{18}$$

$$= \tfrac{3}{4}\sqrt{[5.6.31]} : 36m - 5n.$$

Daher für

$\lvert a : b : \tfrac{1}{3}c \rvert$	$m = \tfrac{1}{3}$, $n = \tfrac{1}{3}$,	$\tfrac{3}{4}\sqrt{[5.6.31]} : \tfrac{31}{3}$,
$\lvert a : \infty b : c \rvert$	$m = 1$, $n = 0$,	〃 〃 〃 〃 $: 36$,
$\lvert \infty a : b : \tfrac{1}{2}c \rvert$	$m = 0$, $n = \tfrac{1}{2}$,	〃 〃 〃 〃 $: -\tfrac{5}{2}$,
$\lvert -a : \tfrac{1}{2}b : \tfrac{1}{3}c \rvert$	$m = -\tfrac{1}{3}$, $n = \tfrac{2}{3}$,	〃 〃 〃 〃 $: -\tfrac{46}{3}$,
$\lvert -a : b : c \rvert$	$m = -1$, $n = 1$,	〃 〃 〃 〃 $: -41$*).

§. 19.

Nachdem ſo das Verfahren, die Winkelverhältniſſe im Schema zu leſen, für die Abtheilung von Kryſtallen, deren Natur in den drei rechtwinkligen Dimenſionen ausgeſprochen iſt, gegeben und erläutert iſt, wenden wir uns zu der Abtheilung, die ſich auf drei Dimenſionen in einer Ebene und eine auf dieſen ſenkrechte Dimenſion bezieht, zu der Abtheilung der drei- und ſechsgliedrigen Syſteme.

Die im §. 15. entwickelten allgemeinen Geſetze der Kry-

---

*) Das Fortſchreiten der rationalen Verhältniſſe in der Art, wie hier kann hinlänglich Bürgſchaft leiſten, daß die numeriſchen Verhältniſſe a : b : c nicht der Natur entſprechen, und für die etwa anzubringenden Correctionen leiten, was uns hier aber von unſerm Zweck zu weit abführen würde.

Digitized by Google

ſtallonomie gelten auch hier, weil von der Seite der rein mathematiſchen Betrachtung dieſe Syſteme gleichfalls auf drei rechtwinklige Dimenſionen können bezogen werden. Auch hier ſind alle kryſtallonomiſche Veränderungen derſelben Richtung ausgeſprochen durch rationale Vielfache derſelben irrationalen Grundzahl, auch hier iſt für jeden Kantenwinkel das irrationale Grundverhältniß, das Verhältniß der Kantenrichtung zum Produkt dreier rechtwinklig gedachten Dimenſionen. — Wir werden hier am kürzeſten zur allgemeinen Entwickelung der Neigungsverhältniſſe einer Zone gelangen, indem wir die Werthe von α, $\alpha^{\cdot}$ u. ſ. w. ausdrücken in zwei rechtwinklige Richtungen α und $\sigma^{\cdot}$, und dieſe Werthe in dem oben gefundenen Ausdruck ſubſtituiren. Es ſei Fig. 14. fg irgend eine Zonenlinie beſtimmt durch die Stücke, die ſie auf α und $\alpha^{\cdot}$ abſchneidet $\mu\alpha = \frac{\mu c}{a}$ und $\nu\alpha^{\cdot} = \frac{\nu c}{c}$. Die auf α ſenkrechte Richtung iſt $\sigma^{\cdot}$, und wenn wir das Stück ce beſtimmen, das auf $\sigma^{\cdot}$ von der Zonenlinie abgeſchnitten wird, ſo gilt dieſer Werth auf $\sigma^{\cdot}$ und der Werth auf α für N und M in dem Ausdruck $\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]}$; — für b gilt die irrationale Grundzahl von $\sigma^{\cdot}$. Es iſt aber $ce = \frac{3\mu\nu}{2\mu - \nu} \; \frac{c}{a\sqrt{3}}$. Wir haben alſo zu ſubſtituiren für

$$M = \mu$$

$$N = \frac{3\mu\nu}{2\mu - \nu}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= a \\ b &= a\sqrt{3} \\ c &= c \end{aligned}\right\} \text{ oder } \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \sqrt{3} \\ c &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Dieſe Subſtitution giebt:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}+c^2\right]}}{abc} = \tfrac{1}{3}\frac{a}{c}\sqrt{\left[4\left(\frac{\mu^2+\nu^2-\mu\nu}{\mu^2\nu^2}\right)+3\frac{c^2}{a^2}\right]}$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{\left[4\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\mu\nu}\right)\frac{a^2}{c^2}+3\right]}.$$

Für den ſpeciellen Sinus einer Fläche $\overset{c}{\overline{\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a'\right|}}$ dieſer Zone haben wir aus denſelben Gründen zu ſetzen in

$$\frac{m}{Na^2} - \frac{n}{Mb^2}, \quad m = m, \quad n = 2n - m. \text{ Demnach d. Werth}$$

$$\frac{m}{Na^2} - \frac{n}{Mb^2} = \frac{m(2\mu-\nu)}{3\mu\nu} - \frac{(2n-m)\nu}{3\mu\nu}$$

$$= \tfrac{2}{3}\left(\frac{m}{\nu} - \frac{n}{\mu}\right).$$

Alſo iſt das Neigungsverhältniß der Fläche $\overset{c}{\overline{\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a'\right|}}$ in dieſer Zone gegen das in derſelben Zone liegende Endglied, die Säulenfläche:

$$\cos : \sin = \sqrt{\left[4\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\mu\nu}\right)\frac{a^2}{c^2}+3\right]} : 2\left(\frac{m}{\nu}-\frac{n}{\mu}\right).$$

Die große Einfachheit des Werthes für den Sinus der verſchiedenen Flächen der Zone beim conſtanten Coſinus, wird für den Gebrauch dieſer allgemeinen Entwickelung ſich beſonders empfehlen, — es bedarf ſo gut wie gar keiner Berechnung.

Man kann immer ohne Schwierigkeit jede Fläche durch $\overset{c}{\overline{\left|\pm\frac{1}{m}a : \pm\frac{1}{n}a'\right|}}$ ausdrücken, indem für Flächen wie $\overset{c}{\overline{\left|\frac{1}{m}a' : \frac{1}{n}a''\right|}}$ nach der Theorie der ausführlichen Bezeichnung

der Kryſtallflächen, die der Herr Profeſſor Weiß in den Abhandlungen der Berliner Academie niedergelegt hat, ſehr einfach der Werth in a gefunden wird; es iſt nämlich

$$\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}a' : \frac{1}{n}a''}} = \overset{c}{\boxed{\frac{1}{m-n}a : \frac{1}{m}a' : \frac{1}{n}a''}}, \text{ ſo}$$

daß für dieſe Flächen im Werthe des Sinus ſtatt $2\left(\frac{m}{\nu} - \frac{n}{\mu}\right)$ geſetzt wird:

$$2\left(\frac{m-n}{\nu} - \frac{m}{\mu}\right).$$

§. 20.

Einige Beiſpiele mögen das Geſagte erläutern. Wir wählen dazu das Syſtem des Rothgiltig-Erz, deſſen Schema Fig. 15. iſt. Die an ihm beobachteten Glieder ſind, außer dem Grundrhomboeder, das erſte und zweite ſtumpfere, und das erſte und zweite ſchärfere, und zwiſchen dem Grundrhomboeder und dem erſten ſtumpfern der metaſtatiſche Drei- und Dreikantner des zweiten ſtumpfern Rhomboeder, und zwiſchen dem erſten und zweiten ſchärfern, der metaſtatiſche Körper des Grundrhomboeders; außerdem kommt wohl noch der Drei- und Dreikantner mit 7fachem Coſinus aus der Kantenzone des Grundrhomboeders vor. Die zweite Säule, die erſte Säule und die gerade Endfläche ſind beobachtet, und Hauy giebt außerdem noch zwei 6gliedrige Pyramiden an, aus der Diagonalzone des Grundrhomboeders und des erſten ſchärfern. Die Ausdrücke dieſer Glieder in den Richtungen s zu geben, ziehen wir hier im Rhomboedriſchen Syſteme vor:

$$\overset{c}{\boxed{2s : s : 2s}} \qquad \overset{-\frac{1}{2}c}{\boxed{2s : s : 2s}} \qquad \overset{\frac{1}{4}c}{\boxed{2s : s : 2s}}$$

$$\overset{-2c}{\boxed{2s : s : 2s}} \qquad \overset{4c}{\boxed{2s : s : 2s}}$$

$$\overset{\frac{1}{8}c}{\boxed{\tfrac{1}{4}s : \tfrac{1}{3}s}} \qquad \overset{\frac{1}{2}c}{\boxed{\tfrac{1}{4}s : \tfrac{1}{3}s}} \qquad \overset{\frac{1}{2}c}{\boxed{\tfrac{1}{10}s : \tfrac{1}{11}s}}$$

Digitized by Google

$$\overset{c}{\boxed{\infty s : \infty s}} \quad \overset{\infty s}{\boxed{s : s}} \quad \overset{\infty s}{\boxed{2s : s : 2s}}$$

$$\overset{c}{\boxed{s : s}} \quad \overset{2c}{\boxed{s : s}}$$

Daß bei der Entwerfung des Schemas hier in Bezug auf s oder σ daſſelbe gilt, was in Bezug auf a (oder α) oben geſagt iſt, bedarf wohl kaum einer Erinnerung.

Nach den Hauyſchen Angaben iſt das Verhältniß s : c $= \sqrt{5} : \sqrt{4}$ *), daher die allgemeine Form aller Winkelverhältniſſe hier

$$\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu\nu}\right) 5 + 3\right]} : 2\left(\frac{m}{\nu} - \frac{n}{\mu}\right).$$

Betrachten wir zuerſt die verſchiedenen Zonen, die von der zweiten ſechsſeitigen Säule aus ſich entwickeln, ſo ſind alle Zonenlinien derſelben parallel mit α, und daher gilt für ſie im Allgemeinen $\mu = \mu$, $\nu = 2\mu$, alſo die allgemeine Form der Neigungsverhältniſſe dieſer Zonen

$$\sqrt{[3(5 + 4\mu^2)]} : 2(m - 2n).$$

Es ſind dies die verſchiedenen Endkantenzonen, ſowohl der Rhomboeder als der Drei- und Dreikantner, die im Gange der Entwickelung rhomboedriſcher Syſteme als beſonders wichtig auftreten. Fangen wir mit der Kantenzone des zweiten ſtumpfern Rhomboeder an, ſo iſt $\mu = \frac{1}{8}$, alſo das Grundverhältniß dieſer Zone $= \sqrt{[3(5 + \frac{4}{64})]} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$,
und das Neigungsverhältniß für die Fläche des zweiten ſtumpfern, und die Fläche des metaſtatiſchen Körpers deſſelben, für

$$\overset{\frac{1}{4}c}{\boxed{2s : s' : 2s''}} \quad \overset{\frac{1}{8}c}{\boxed{\tfrac{1}{5}s' : \tfrac{1}{4}s''}}$$ iſt sin : cos $=$ $\sqrt{3} : \frac{1}{3} : 1$; für die letztere Fläche nämlich muß man für

---

*) Dies Verhältniß $\frac{s}{c}$ wird aus dem halben Kantenwinkel $= k$ des Grundrhomboeders berechnet nach

$$\frac{s}{c} = \frac{r}{2}\sqrt{\left[\frac{\cos 3k}{\cos^3 k}\right]}.$$

den Werth des cos ſich des Ausdrucks bedienen $2(m-n-2m) = -2(m+n)$, ſiehe §. 19. Für die Kantenzone des erſten ſchärfern iſt $\mu = \frac{1}{4}$, daher hier das Grundverhältniß $\sqrt{7} : 1$.

Für die Kantenzone des Drei- und Dreikantners $\boxed{\overset{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}\sigma : \frac{1}{4}s}}$ die nicht identiſch mit der Kantenzone des Grundrhomboeders, iſt $\mu = \frac{5}{8}$, daher : $\sqrt{[5 . 7]} : 1$ u. ſ. w.

Wir ſtellen überſichtlich die Verhältniſſe dieſer Art, die hier ſtatt finden, beiſammen

$$\sqrt{[3(5+4\mu^2)]} : 2(m-2n)$$

$\mu = \frac{1}{8}$	$\sqrt{3} : \frac{1}{3} : 1$
$\mu = \frac{1}{4}$	$\sqrt{7} : 1$
$\mu = \frac{1}{2}$	$\sqrt{2} : 1$
$\mu = \frac{5}{8}$	$\sqrt{5.7} : 1$
$\mu = 1$	$\sqrt{3} : \frac{2}{3} : 2$
$\mu = 2$	$\sqrt{7} : \frac{4}{3} : \frac{4}{2} : 4$
$\mu = \frac{5}{2}$	$\sqrt{10} : 1$
$\mu = 4$	$\sqrt{23}$
$\mu = 5$	$\sqrt{5.7} : 4$
$\mu = \frac{11}{2}$	$\sqrt{6.7} : 3$ *).

*) In dieſen Verhältniſſen iſt eine auffallende Beziehung zu den analogen Verhältniſſen im regulären Syſtem. Zuerſt iſt dieſes ſo von Hauy beſtimmte Grundrhomboeder dasjenige, deſſen Endkantenwinkel die Endkantenwinkel des regulären Octaeder, rhomboedriſch geſtellt, zu 180° ergänzen; beide haben gleiche, nur umgekehrte Neigungsverhältniſſe in den Endkanten. Im zweiten ſtumpfern iſt hier das Grundverhältniß $\sqrt{3}$, und eben ſo im zweiten ſtumpfern Rhomboeder vom Octaeder aus; im zweiten ſchärfern iſt hier das Grundverhältniß $\sqrt{7}$, dort im erſten ſchärfern $\sqrt{6}$, im dritten ſchärfern hier $\sqrt{23}$, dort im zweiten ſchärfern $\sqrt{22}$ u. ſ. w. —

Eine andre Eigenſchaft dieſes Rhomboeders iſt, daß es immer Endkantenzonen auf der Seite der Reihe der ſchärfern Rhomboeder und Drei- und Dreikantner hat, die daſſelbe Grundverhältniß haben, wie auf der Seite der ſtumpfern Glieder ſtatt findet.

Eine andre Eigenſchaft iſt, daß das erſte ſchärfere Rhomboeder vom invertirten Rhomboeder unſers Grundrhomboeders dasjenige iſt,

Digitized by Google

Die abwechſelnden Flächen eines Drei- und Dreikantners bilden immer zwei gleiche, nur ihrer Stellung nach verſchiedene, Rhomboeder. Solche Drei- und Dreikantner, die dieſelbe Beziehung auf die verſchiedenen Glieder der Hauptreihe haben, geben Rhomboeder, die untereinander wieder in derſelben Beziehung ſtehen, wie die Glieder der Hauptreihe. So giebt der Drei- und Dreikantner $\left[\frac{\frac{1}{8}c}{\frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s}\right]$, der metaſtatiſche des zweiten ſtumpfern Rhomboeders Rhomboeder, deren nächſt ſchärfere Rhomboeder die des metaſtatiſchen Körpers des erſten ſtumpfern ſind: $\left[\frac{\frac{1}{4}c}{\frac{1}{5}s : \frac{1}{4}s}\right]$; deren ſchärfere ſind die Rhomboeder des metaſtatiſchen Körpers des Grundrhomboeders u. ſ. w.

Daſſelbe gilt von den ſechsgliedrigen Pyramiden, auch ſie ſind ihrer Beziehung nach Drei- und Dreikantner. In der Fig. 15. iſt für die metaſtatiſchen Körper dieſes Verhältniß

---

deſſen Endkantenwinkel die des Kalkſpath-Rhomboeders zu 180° ergänzen. Dieſes invertirte Rhomboeder iſt $\left[\frac{-\frac{5}{4}c}{2s : s : 2s}\right]$, und ſein erſtes ſchärfere $\left[\frac{\frac{5}{2}c}{2s : s : 2s}\right]$, (die Abſtumpfung der ſtumpfern Endkante von $\left[\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s}\right]$), Flächen, die der Ausbildung vielleicht hier ſehr nahe liegen, zumal da $\left[\frac{-5c}{2s : s : 2s}\right]$ ſcheint vorzukommen. — Das Rhomboeder $\left[\frac{\frac{5}{2}c}{2s : s : 2s}\right]$ hat noch die Eigenſchaft, daß es dem Rhomboeder aus den Rhomboidflächen des Quarz ſehr nahe liegt — *und daher alſo dies Rhomboeder aus den Rhomboidflächen des Quarzes demjenigen ſehr nahe liegt, das die Endkantenwinkel des Kalkſpath-Rhomboeders zu 180° ergänzt.* Wenn zwei Rhomboeder in dieſem Verhältniß ſtehen, ſo muß, wenn in dem einen $\frac{c}{s} = \sigma$ iſt, in dem andern

$$\frac{c}{s} = \sqrt{\left[\frac{\sigma^2 + 4}{2\sigma^2 - 1}\right]}$$ ſein.

Digitized by Google

durch die punktirten Linien angezeigt. Die Linien, die den Kantenzonen der Rhomboeder derſelben entſprechen, gehen durch $\frac{7}{5(m)}\alpha$ und $\frac{7}{(m)}\alpha^{\cdot}$, und zwar die Kantenzonenlinie für das Rhomboeder des metaſtatiſchen Körpers des Grundrhomboedrs durch $\frac{7}{5}\alpha$ und $7\alpha^{\cdot}$, ſeines nächſtſtumpfern durch $\frac{7}{10}\alpha$ und $\frac{7}{2}\alpha^{\cdot}$, und des zweiten ſtumpfern durch $\frac{7}{20}\alpha$ und $\frac{7}{4}\alpha^{\cdot}$.

Werden die Werthe $\frac{7}{5(m)} = \mu$, und $\frac{7}{(m)} = \nu$ in dem Ausdruck der Winkelverhältniſſe geſetzt, ſo wird derſelbe

$$\sqrt{\left[\frac{15(m)^2 + 21}{7}\right]} : \left(m\frac{(m)}{7} - n\frac{5(m)}{7}\right)2.$$

Für die Drei- und Dreikantnerflächen ſelbſt in dieſen Zonen iſt immer $m = \frac{2}{(m)}$ und $n = \frac{s}{2(m)}$, daher iſt das Winkelverhältniß für ſie: $\sqrt{[15(m)^2 + 21]} : 3\sqrt{7}$

$(m) = 1$ sin : cos $= 2 : \sqrt{7}$ met. Kpr. des Grundrhbdr.
$(m) = 2$ ‹ ‹ ‹ $= 3 : \sqrt{7}$ — — — erſt. ſtumpf.
$(m) = 4$ ‹ ‹ ‹ $= \sqrt{29} : \sqrt{7}$ — — — 2ten —

So laſſen ſich aus dem allgemeinen Ausdruck der Winkelverhältniſſe in dem drei- und ſechsgliedrigen Syſteme für die beſondern Fälle Lehrſätze entwickeln, wie denn der allgemeine Werth für die Neigungsverhältniſſe der Endkanten der Rhomboeder der metaſtatiſchen Körper als ſolcher leicht auszudrücken wäre. Dieſe Entwickelung iſt nicht ohne Intereſſe und nicht ohne überraſchende Beziehungen. Hier genügt es uns, die Möglichkeit und die Leichtigkeit in unſerer Methode dazu zu gelangen, gezeigt zu haben. — Für die numeriſche Berechnung wird man meiſt ſich dieſer Subſtitutionen in dem allgemeinen Ausdruck nicht bedienen; — unmittelbar auf dem Schema die Verhältniſſe zu leſen, und daran den leichten Calcul anzuſchließen, wird meiſtens immer noch einfacher ſein; z. B. im eben betrachteten Gegenſtande bedurfte es nur der Berechnung der Li-

Digitized by Google

nie cd, ſo iſt de, der Coſinus, bekannt und $\sqrt{[dc^2 + 1]}$ der Sinus; der Werth von dc iſt $= \sqrt{\tfrac{4}{3}}\sqrt{[1 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2]}$ — alles Beziehungen, die ohne große Uebung ſchon in der bloßen Anſicht des Schemas können überſchlagen werden.

§. 21.

Wir ſchließen dieſen Abſchnitt mit der Erläuterung einer Zonenbezeichnung, wie ſie ſich von dieſer graphiſchen Darſtellung aus der Anſchauung und Auffaſſung aufdringt. Es bedarf nur die Zonenlinie zu bezeichnen in der Projection auf der geraden Endfläche, und dies geſchieht durch die Angabe der abgeſchnittenen Theile der Linien α und β, ſo daß $[M\alpha : N\beta]$ das allgemeine Zeichen einer Zone iſt, deren Zonenlinie die Stücke $M\alpha$ und $N\beta$ auf α und β abſchneidet. Iſt dieſe Zonenlinie mit β parallel und ſchneidet das Stück $M\alpha$ auf α ab, ſo iſt ihr Zeichen $[M\alpha : \infty\beta]$; wäre ſie die Linie β ſelbſt, ſo wäre ihr Zeichen $[0\alpha : \infty\beta]$. Schneidet die Linie endlich weder von α noch von β einen Theil ab, ſondern geht ſie durch den Anfangspunkt von α und β (d. i. durch den Ort der geraden Endfläche), iſt die Linie alſo zu einer vertikalen Zone gehörig: ſo wird ihre Lage beſtimmt durch das Verhältniß zweier Linien, die aus einem Punkte in ihr auf α und β ſenkrecht gezogen ſind, — oder durch das Verhältniß von den Stücken auf α und β, die von dieſen Senkrechten abgeſchnitten werden. Es ſei dies Verhältniß $M\alpha : N\beta$, ſo iſt das Zeichen dieſer Zonenlinie oder Zone $0[M\alpha : N\beta]$. Wie dieſe vor dem Zeichen ſtehende Null dem zu Bezeichnenden wirklich entſpricht, wird man aus Fig. 16. erſehen. Die Zonenlinie ab wird bezeichnet durch $[M\alpha : N\beta]$, die ihr parallele $a'b'$ durch $[\tfrac{2}{3}M\alpha : \tfrac{2}{3}N\beta] = \tfrac{2}{3}[M\alpha : N\beta]$; eben ſo iſt das Zeichen für $a''b'' = \tfrac{1}{3}[M\alpha : N\beta]$, und hiernach wird es klar, daß für $a'''b'''$ das Zeichen, ganz in der Analogie, iſt: $0[M\alpha : N\beta]$.

Zur beſſern Verſtändigung wollen wir in dieſer Bezeichnung die Zonen im Topasſyſtem aufzählen. S. Fig. 9.

Digitized by Google

Die Linien für Zonen von $|c : \infty a : \infty b|$ nach $|a : -b : \infty c|$ von $|a : \frac{1}{3}c : \infty b|$ nach $|- a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c|$, von $|b : c : \infty a|$ nach $|a : c : \infty a|$, von $|\frac{1}{2}b : c : \infty b|$ nach $|a : b : c|$ ſind parallel, gehen daher alle durch $m\alpha$ und $m\beta$; ihre Zeichen ſind in derſelben Ordnung: $0[\alpha : \beta]$, $\frac{1}{3}[\alpha : \beta]$, $1[\alpha : \beta]$, $2[\alpha : \beta]$. So wird folgende Aufzählung verſtändlich ſein.

Von	$\|c : \infty a : \infty b\|$	nach	$\|a : -b : \infty c\|$	—	$0[\alpha : \beta]$
—	$\|a : \frac{1}{3}c : \infty b\|$	—	$\|-a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c\|$	—	$\frac{1}{3}[\alpha : \beta]$
—	$\|b : c : \infty a\|$	—	$\|a : c : \infty b\|$	—	$1[\alpha : \beta]$
—	$\|\frac{1}{2}b : c : \infty a\|$	—	$\|a : b : c\|$	—	$2[\alpha : \beta]$
—	$\|-a : b : \frac{1}{3}c\|$	—	$\|a : \frac{1}{3}c : \infty b\|$	—	$\frac{1}{3}[\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\|b : \frac{1}{2}c : \infty a\|$	—	$\|a : c : \infty b\|$	—	$1[\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\|a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c\|$	—	$\|a : b : c\|$	—	$3[\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\|c : \infty a : \infty b\|$	—	$\|a : \frac{1}{2}b : \infty c\|$	—	$0[\frac{1}{2}\alpha : \beta]$
—	$\|b : \frac{1}{2}c : \infty a\|$	—	$\|a : -b : \frac{1}{2}c\|$	—	$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\alpha : \beta]$
—	$\|b : c : \infty a\|$	—	$\|a : -b : c\|$	—	$1[\frac{1}{2}\alpha : \beta]$
—	$\|\frac{1}{2}b : c : \infty a\|$	—	$\|a : c : \infty b\|$	—	$2[\frac{1}{2}\alpha : \beta]$
—	$\|c : \infty a : \infty b\|$	—	$\|\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b : \infty c\|$	—	$0[\frac{1}{3}\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\|-a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c\|$	—	$\|a : -b : \frac{1}{3}c\|$	—	$\frac{1}{3}[\frac{1}{3}\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\|b : \frac{1}{2}c : \infty a\|$	—	$\|a : \frac{1}{3}c : \infty b\|$	—	$1[\frac{1}{3}\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\|-a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c\|$	—	$\|a : b : \frac{1}{3}c\|$	—	$\frac{5}{3}[\frac{1}{3}\alpha : \frac{1}{2}\beta]$

u. ſ. w.

So ordnen durch die Zeichen ſich die Zonen in Zonengruppen, nach den Endgliedern derſelben, die ihnen gemeinſchaftlich ſind. Alle Zonen, $1[\alpha : \beta]$, $2[\alpha : \beta]$... $m[\alpha : \alpha]$ haben die Säulenfläche $|a : b : \infty c|$ gemeinſchaftlich; überhaupt haben haben alle Zonen $\frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$ die Säulenfläche $\left|\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \infty c\right|$

gemeinſchaftlich. Außer dieſer Säulenfläche liegen im Zeichen noch mehrere Elemente, die der Anſchauung der Zonen äußerlich am Kryſtall dienen. Nämlich in dem Zeichen $\frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$ liegt unmittelbar, daß in dieſer Zone außer der Säulenfläche $\boxed{\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \infty c}$ noch liegen die Flächen $\boxed{\frac{1}{M}a : \frac{1}{P}c : \infty b}$ und $\boxed{\frac{1}{N}b : \frac{1}{P}c : \infty a}$, wie aus der Herleitung dieſer Bezeichnungsart ſich von ſelbſt ergiebt. Welche Modification dies z. B. für $0[M\alpha : N\beta]$ erleidet, wird nicht ſchwierig ſein zu überſehen; die Säulenfläche $\boxed{\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \infty c}$ bleibt dieſe Zone, aber $\boxed{\frac{1}{M}a : 0c : \frac{0}{0}b}$ und $\boxed{\frac{1}{N}b : 0c : \frac{0}{0}a}$ fallen hier in eine Fläche $\boxed{c : \infty a : \infty b}$ zuſammen, da dieſe $= \boxed{\frac{1}{M.0}a : c : \frac{1}{0}b}$ $= \boxed{\frac{1}{N0}b : c : \frac{1}{0}a}$ iſt.

Daß in Hinſicht der Vorzeichen, Plus und Minus, um die Lage der Zonenlinie zu beſtimmen, ob rechts oder links, vorne oder hinten, daſſelbe gilt, was bei der Unterſcheidung der Lage der Flächen in ihren Zeichen, verſteht ſich von ſelbſt.

§. 22.

Daſſelbe Princip, wonach die Zonen der Syſteme mit drei rechtwinkligen Dimenſionen bezeichnet ſind, erleidet keine Schwierigkeit in der Anwendung auf die Bezeichnung der Zonen der drei- und ſechsgliedrigen Syſteme. Hier wird die Lage der Zonenlinie in der Projection auf der geraden Endfläche bezeichnet durch die Angabe der Stücke, die ſie auf α und α' abſchneidet

Digitized by Google

(oder bei rhomboedriſchen Syſtemen auf σ und $\sigma^{\cdot}$, da es für die äußere Betrachtung Vorzüge haben kann, dieſe Richtungen hier hervorzuheben), ſo daß $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha^{\cdot}]$ das allgemeinſte Zeichen einer Zone hier iſt. Auf dem Schema des Quarzſyſtems Fig. 6. wäre demnach $(\alpha : 2\alpha^{\cdot})$ die Kantenzone des Grunddihexaeder, $2(\alpha : 2\alpha^{\cdot})$ dieſelbe Zone von $\boxed{\begin{matrix}2c\\ a : a\end{matrix}}$, $3(\alpha : 2\alpha)$ dieſelbe Zone von $\boxed{\begin{matrix}3c\\ a : a\end{matrix}}$ u. ſ. w. Die Diagonalzonen von dieſen Dihexaedern in derſelben Folge ſind $\frac{4}{3}(\alpha : \alpha^{\cdot})$, $\frac{8}{3}(\alpha : \alpha^{\cdot})$, $\frac{12}{3}(\alpha : \alpha^{\cdot})$ u. ſ. w. $\frac{2}{3}(\alpha : \alpha^{\cdot})$ die Kantenzonen des Rhomboeders $\boxed{\begin{matrix}c\\ a : a\end{matrix}}$. Im rhomboedriſchen Syſteme Fig. 15. $[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ die Kantenzone des Grundrhomboeders, $2[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ die Kantenzone des erſten ſchärfern, $4[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ dieſelbe Zone des zweiten ſchärfern $= 2^2[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$; die des dritten würde $2^3[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ ſein. Auf gleiche Weiſe ſind die Kantenzonen des erſten, zweiten u. ſ. w. ſtumpfern Rhomboeders $2^{-1}[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$, $2^{-2}[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ u. ſ. w. Die Kantenzonen mit geraden Potenzen von 2 vor der Klammer liegen auf einer Seite, ſind einer Ordnung, die mit ungeraden Potenzen ſind anderer Ordnung, ganz daſſelbe, was von der Lage der Rhomboederflächen der Hauptreihe ſelbſt gilt — ſo daß das allgemeine Zeichen der Kantenzone des m ten Rhomboeders aus der Hauptreihe wäre $(-2)^{\pm m}[\sigma : \frac{0}{2}\sigma]$.

Für die oben §. 20. betrachteten abwechſelnden Kantenzonen des metaſtatiſchen Drei- und Dreikantners ſind die Zeichen $7[\sigma : \frac{1}{5}\sigma]$, $\frac{7}{2}[\sigma : \frac{1}{5}\sigma]$, $\frac{7}{4}[\sigma : \frac{1}{5}\sigma]$, nämlich für die gedachten Zonen von $\boxed{\begin{matrix}\frac{1}{2}c\\ \frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}\frac{1}{4}c\\ \frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}\frac{1}{8}c\\ \frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s\end{matrix}}$. — So weit iſt die Anwendung deſſelben Princips der Zonenbezeichnung auf die drei- und ſechsgliedrigen Syſteme ohne Schwierigkeit,

Digitized by Google

nur bei der Anwendung auf die vertikalen Zonen dieſer Syſteme könnte man einen Augenblick anſtehen, und wirklich erlauben auch die drei Dimenſionen in einer Ebene hier nicht dieſelbe mathematiſche Einfachheit im allgemeinen Ausdruck. Die Analogie fordert, daß wir die Linie der vertikalen Zone ſo bezeichnen, daß die Säulenfläche, die in dieſer Zone liegt, unmittelbar im Zonenzeichen zu leſen iſt. Dieſes wird erreicht durch die Angabe des Verhältniſſes der Stücke, die auf α und $\alpha^{\cdot}$ abgeſchnitten werden durch zwei aus einem Punkte der Zonenlinie auf ſie gezogene Senkrechte. Das Zeichen ſolcher Zone, gegenüber der Zone $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha^{\cdot}]$, iſt $0[M\alpha : N\alpha^{\cdot}]$. Es iſt hier aber, wenn der Zonenlinie $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$ eine Vertikal-Zonenlinie parallel geht, das Zeichen für dieſe $\frac{0}{\sqrt{3}}[M\alpha : N\alpha]$ d. h. M und N ſind in dieſem Zeichen nicht gleich dem M und N in $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$. In Fig. 17. iſt cf parallel mit $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha^{\cdot}]$, und die von den Senkrechten ga und gb abgeſchnittenen Stücke verhalten ſich wie cd und ce, (beides die mittleren Richtungen σ, und $\sigma^{\cdot}$), weil $\angle\alpha = \alpha^{\cdot}$ und $\angle\beta = \beta^{\cdot}$. Demnach würden die vertikalen Zonen, z. B. im Quarzſyſtem ſ. Fig. 6. ſeien: $0[\alpha : \alpha]$, $0[3\alpha : 4\alpha]$, $0[4\alpha : 5\alpha]$, $0[5\alpha : 6\alpha]$, von $\boxed{\overset{c}{\infty a : \infty a}}$, nach $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}a}}$, nach $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{5}a}}$ nach $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{6}a}}$ u. ſ. w. Die in dieſen Zonen liegenden Säulenflächen ſind $\boxed{\overset{\infty c}{\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}a}}$, $\boxed{\overset{\infty c}{\tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{5}a}}$ u. ſ. w. — Es liegt nämlich allgemein in der Zone $0[M\alpha : N\alpha]$ die Säulenfläche

$$\boxed{\overset{\infty c}{\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}a}}.$$

Digitized by Google

In der Zone $\frac{1}{P}[M\alpha^{\cdot} : N\alpha^{\cdot\cdot}]$ ſind für die Auffaſſung dieſer Zone in der äußern Betrachtung des Kryſtalls unmittelbar in dieſem Zeichen gegeben die Flächen $\overset{\frac{1}{P}c}{\boxed{\frac{2}{M}a : \frac{1}{M}a^{\cdot} : \frac{2}{M}a^{\cdot\cdot}}}$ und $\overset{\frac{1}{P}c}{\boxed{\frac{2}{N}a^{\cdot} : \frac{1}{N}a^{\cdot\cdot} : -\frac{2}{N}a}}$, die in dieſer Zone liegen; und die ihr angehörige Säulenfläche iſt $\overset{\infty c}{\boxed{\frac{1}{M+N}a : \frac{1}{2M-N}a}}$, (da in Fig. 17. eb : ga, wenn ef parallel mit der Zonenlinie $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$ iſt, ſich verhält wie $2M - N : M + N$). — In Hinſicht der Lage auf α, $\alpha^{\cdot}$, $\alpha^{\cdot\cdot}$ und ihre entgegengeſetzten Enden kann keine Schwierigkeit eintreten, zumal da hier auf dem Schema alles unmittelbar angeſchaut werden kann.

§. 23.

Die Bezeichnung der Zonen läßt ſogleich die weſentlichſte Eigenſchaft derſelben erkennen, nämlich ihr irrationales Grundverhältniß, diejenige Eigenſchaft, deren weiteres Studium die größte Fruchtbarkeit für die Kryſtallonomie verſpricht. Es ergiebt ſich nämlich aus der Darſtellung der beiden vorigen Paragraphe, daß für die Zone $\frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$ das Grundverhältniß iſt $\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}+\frac{a^2}{P^2}\right]}$ — daß alſo

für $\frac{1}{P}[M\alpha : \infty\beta]$. $\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{c^2}{P}\right]}$

für $\frac{1}{P}[\infty\alpha : N\beta]$. $\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{b^2}{N^2}+\frac{c^2}{P^2}\right]}$

Digitized by Google

für $0[M\alpha : N\beta]$. $\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}\right]}$

das Grundverhältniß iſt. Das beſondere Verhältniß der genannten Zonen iſt:

für $\frac{1}{P}[M\alpha:N\beta]$. $\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}+\frac{c^2}{P^2}\right]} : \frac{m}{Na^2}-\frac{n}{Mb^2}$

für $\frac{1}{P}[M\alpha:\infty\beta]$. $\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{c^2}{P}\right]} : \frac{n}{Mb^2}$

für $\frac{1}{P}[\infty\alpha:N\beta]$. $\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{b^2}{N^2}+\frac{c^2}{P}\right]} : \frac{m}{Na^2}$

für $\frac{1}{\infty}[M\alpha:N\beta]$. $\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}\right]} : \frac{m}{Na^2}+\frac{n}{Mb^2}$

Die Herleitung dieſer Verhältniſſe ergiebt ſich, wenn man bedenkt, daß $\frac{M}{P}$ und $\frac{N}{P}$ im Zonenzeichen daſſelbe bedeuten, was wir oben §. 14. in der Herleitung des allgemeinen Ausdrucks der Winkelverhältniſſe mit M und N bezeichneten.

Eben ſo in den ſechs- und dreigliedrigen Syſtemen: das Verhältniß in der Zone $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$ iſt

$$\sqrt{\left[4\left(\frac{1}{M^2}+\frac{1}{N^2}-\frac{1}{MN}\right)\frac{a^2}{c^2}+\frac{1}{P^2}3\right]} : 2\left(\frac{m}{N}-\frac{n}{M}\right),$$

ſiehe §. 19, wo nur μ, ν ſtatt der hier gebrauchten $\frac{M}{P}$ und $\frac{N}{P}$ ſtehen. — Für die vertikale Zone $0[M\alpha : N\alpha]$ iſt das Verhältniß

$$\sqrt{3}\sqrt{\left[4\left(\frac{1}{M^2}+\frac{1}{N^2}-\frac{1}{MN}\right)\frac{a^2}{c^2}\right]} : 2\left(\frac{2m-n}{N}-\frac{m-2n}{M}\right)$$

$$=\frac{a}{c}\sqrt{3}\sqrt{\left[\frac{1}{M^2}+\frac{1}{N^2}-\frac{1}{MN}\right]} : \frac{2m-n}{N}-\frac{m-2n}{M} \text{ *)}.$$

§. 24.

---

*) Dieſes Verhältniß iſt oben nicht entwickelt, hat aber in ſeiner Entwickelung auch weiter keine Schwierigkeit. Zur Erläuterung

§. 24.

Dieſe Bezeichnung iſt auf der wirklichen Gegenſeite des Begriffs der Zonen gegründet, von der, worauf der Herr Profeſſor Weiß ſeine Bezeichnung gegründet hat, iſt alſo weſentlich dieſelbe, und deshalb frei vom Vorwurf unnützer Mehrung der Terminologie. Vorliegende Bezeichnung giebt die Zonenebene, bezeichnet dieſe, dagegen der Herr Profeſſor Weiß die Normale dieſer Ebene, die auf dieſer Zonenebene ſenkrecht ſtehende Zonenaxe bezeichnet. Die ſenkrechte Richtung iſt aber eine wirklich entgegengeſetzte Richtung, hat zu den Grundrichtungen des Kryſtalls daſſelbe nur umgekehrte Verhältniß; daher beide Bezeichnungsarten gleichwerthig ſind. Dem gemäß iſt auch die Verwandlung des einen Zeichens in das andere. Herr Prof. Weiß bezeichnet die Zonenaxe in den Syſtemen mit drei rechtwinkligen Dimenſionen durch das Verhältniß der Stücke, die von a, b, c

---

mögen ihm die im vorigen Paragraph angeführten vertikalen Zonen des Quarzſyſtems dienen. Die Angabeu von Hauy und die Meſſungen von Malus und Philipps entſprechen dem Verhältniß $1 : \sqrt{[1 + \frac{1}{5}]}$ für a : c; neuere Angaben vom Profeſſor Mohs in ſeiner Charakt. d. n. M. liegen zwiſchen $1 : \sqrt{[1 + \frac{1}{5}]}$ und $1 : \sqrt{[1 + \frac{1}{4}]}$, ſo daß dieſen am nächſten $1 : \sqrt{\left[1 + \frac{1+1}{5+4}\right]} = \sqrt{9} : \sqrt{11}$ für a : c liegt. Wir bedienen uns hier der ältern Angaben, wonach a : c $= \sqrt{5} : \sqrt{6}$; dann wird für die Verhältniſſe in den vertikalen Zonen, der Ausdruck:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sqrt{\left[\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2} - \frac{1}{MN}\right]} : \frac{2m - n}{N} - \frac{m - 2n}{M}$$

$$o[\alpha : \alpha] \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} : 2 : 4 : 6 : 8$$

$$o[3\alpha : 4\alpha] \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} : 2\sqrt{13}$$

$$o[4\alpha : 5\alpha] \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} : 2\sqrt{21}$$

$$o[5\alpha : 6\alpha] \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} : 2\sqrt{31}.$$

Digitized by Google

abgeſchnitten werden, durch drei aus einem Punkte der Zonenaxe auf a, b, c gezogene Senkrechte, wenn die Zonenaxe durch den Mittelpunkt des Syſtem's gelegt iſt, ſo daß ſein allgemeines Zeichen wäre $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \frac{1}{P}c\right) = \left(\frac{P}{M}\frac{a}{c} : \frac{P}{N}\frac{b}{c} : 1\right)$, — und dieſem Zeichen entſpricht in unſrer Bezeichnungsart $\left[\frac{M}{P}\frac{c}{a} : \frac{N}{P}\frac{c}{b}\right] = \frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$. Das Zeichen $\frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$ bezeichnet die Ebene, die durch $\frac{M\alpha}{P}$, $\frac{N\beta}{P}$ und 1 gelegt iſt, deren vollſtändiges Zeichen alſo wäre $\left|\frac{M}{P}\frac{c}{a} : \frac{N}{P}\frac{c}{b} : 1\right| = \left|M\frac{1}{a} : N\frac{1}{b} : P\frac{1}{c}\right|$; daß die hierauf ſenkrecht ſtehende Zonenaxe durch $\frac{P}{M}\frac{a}{c}$ und $\frac{P}{N}\frac{b}{c}$ und 1 beſtimmt iſt, ergiebt ſich aus §. 17., und es folgt ihr Zeichen $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \frac{1}{P}c\right)$.

Daher iſt für

$\frac{1}{P}[M\alpha : \infty\beta]$ beim H. W. $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{P}c : \frac{1}{\infty}b\right)$

$\frac{1}{P}[\infty\alpha : N\beta]$ „ „ „ $\left(\frac{1}{N}b : \frac{1}{P}c : \frac{1}{\infty}a\right)$

$\frac{1}{\infty}[M\alpha : N\beta]$ „ „ „ $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \frac{1}{\infty}c\right)$.

Dieſelbe Umkehrung der Verhältniſſe bei der Verwandlung des einen Zonenzeichens in das andere findet ſtatt bei den drei- und ſechsgliedrigen Syſtemen. Es ſei Fig. 18. ab die Zonenlinie $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$, ſo ſchneidet die auf der Ebene dieſer Zone ſenkrecht ſtehende, durch den Mittelpunkt des Kryſtalls gelegte Zonenaxe die gerade Endfläche in g, welcher Punkt durch Senkrechte

in d und f auf α und α beſtimmt iſt, und wo de $= \frac{P}{N\alpha}$, ef $= \frac{P}{M\alpha}$ iſt, aus Gründen, die denen in §. 17. angegebenen, beim Verfahren die Zonenaxe in Syſteme von drei rechtwinkligen Dimenſionen zu beſtimmen, ganz analog ſind. Wenn nun auch hier die Lage der Zonenaxe durch das Verhältniß der Stücke ausgedrückt wird, die auf a, a, c abgeſchnitten werden von Linien die aus einem Punkte der Zonenaxe ſenkrecht auf a, a, c gezogen werden, ſo iſt dies Verhältniß für die Zonenaxe von $\frac{1}{P}[M\alpha:N\alpha] = \left(\frac{P}{M}\frac{a}{c} : \frac{P}{N}\frac{a}{c} : 1\right) = \left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}a : \frac{1}{P}c\right)$. Für die Zone $0[M\alpha : N\alpha]$, wo unſere Zonenlinie durch das Verhältniß der auf α und α von den Senkrechten abgeſchnittenen Theile bezeichnet iſt, wird in der Bezeichnung der Zonenaxe das Verhältniß der Stücke von a und a angegeben werden, die, nicht Senkrechte, ſondern die ſie ſelbſt auf dieſen Richtungen abſchneidet, da für dieſe Abtheilung von Zonen die Zonenaxe immer in der Ebene der a, a', a'', liegt; und dies iſt $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}a : 0c\right)$.

Dritter Abſchnitt.

Verfahren, die Neigungsverhältniſſe in den Flächen durch das Schema zu finden.

§. 25.

Das genauere Studium der Flächen eines Kryſtalls iſt wichtig, ſie ſind das Moment der Thätigkeit des ganzen Kryſtalls in einer beſtimmten Richtung. Nichts tritt eigenthümlicher und beſtimmter hervor, phyſikaliſch und mathematiſch, als die Richtung. So wie der Richtung eine irrationale Grundzahl

Digitized by Google

entſpricht, die für alle beſtimmte Längen der Richtungen nur eine rationale Vervielfachung erleidet, wie jeder Zone ein irrationales Grundverhältniß entſpricht — ſo entſpricht jeder Kryſtallfläche ein irrationales Grundverhältniß, von welchem das Neigungsverhältniß irgend eines ihrer ebenen Winkel nur ein rationales Vielfache iſt. Die Neigungsverhältniſſe für alle mögliche, kryſtallonomiſche ebene Winkel einer Fläche ſind rationale Vielfache eines gemeinſchaftlichen irrationalen Grundverhältniſſes, ſo daß die Natur einer Fläche durch dieſes ihr irrationales Grundverhältniß auf das Beſtimmteſte gegen jede andere individualiſirt iſt. Jede Fläche behauptet in ihrer ganzen Entwickelung eine ſcharf begrenzte Individualität, deren arithmetiſche Grundform ihr irrationales Grundverhältniß, deren geometriſches ihre Beziehung auf die Dimenſionen des Syſtems iſt.

Das Grundverhältniß jeder Fläche iſt das Verhältniß ihrer Richtung, d.h. ihrer Normale zum Produkte der drei rechtwinkligen Dimenſionen des Kryſtalls. Je zwei auf einander ſenkrecht ſtehende Richtungen in der Kryſtallfläche ſtehen immer gegen einander in dieſem irrationalen Verhältniß, — das Individuelle für jede Fläche iſt das irrationale Verhältniß zweier Richtungen in ihr, die auf einander ſenkrecht ſtehen, das Verhältniß ihrer Dimenſionen. Die Flächendimenſionen ſind die Dimenſionen des Syſtems in eine beſtimmte Richtung hineingebildet.

So tritt uns die Beziehung jeder Richtung in der Fläche zu dieſen Senkrechten, zu den Dimenſionen der Fläche, als die nächſte entgegen, und wir werden jede Richtung beſtimmen durch das Verhältniß der Theile von den Dimenſionen, die ſie von ihnen abſchneidet, d. h. durch das Verhältniß ihrer Neigung gegen die Dimenſionen.

§. 26.

In unſerm Schema, wo die Flächenorte auf die gerade Endfläche projicirt ſind, ſind ſowohl das irrationale Grundver-

Digitized by Google

hältniß der Dimenſionen der geraden Endfläche unmittelbar zu leſen, als auch die rationalen Verhältniſſe der Dimenſionen für die verſchiedenen Richtungen in der geraden Endfläche, die durch ihren Conflikt mit andern Flächen in ihr hervorgerufen werden, für die Richtungen, die ſie mit irgend einer andern Fläche gemein hat. Jenes, das irrationale Grundverhältniß ihrer Dimenſionen iſt das Verhältniß der Dimenſionen des Kryſtalls a : b, das ſtets für zwei auf einander ſenkrecht ſtehende Richtungen gilt. Denn es ſeien Fig. 19. a' und b' zwei andere auf einander ſenkrecht ſtehende Richtungen, ſo iſt ihr irrationales Verhältniß daſſelbe, welches für ed : fg gilt, wenn fg ‡ b'; ed : fg iſt aber, wenn fg durch ma und nb beſtimmt iſt,

$$= \frac{mnab}{\sqrt{[m^2a^2 + n^2b^2]}} : \sqrt{[m^2a^2 + n^2b^2]} = mnab : m^2a^2 + n^2b^2.$$

Das irrationale Verhältniß von $a' : b'$ iſt alſo ab : 1, oder = a : b.

Was die rationalen Verhältniſſe betrifft, für die verſchiedenen Richtungen in ihr, die durch den Conflikt mit andern Flächen in ihr beſtimmt werden, ſo dürfen wir nur bedenken, daß die Linie, die von dem Ort der geraden Endfläche nach einem andern Flächenorte gezogen iſt, ſenkrecht ſteht auf der Richtung, die die gerade Endfläche mit der andern Fläche gemein hat, ſenkrecht auf der Richtung, in welcher die gerade Endfläche von der andern Fläche geſchnitten wird. Die Verbindungslinien des Flächenorts der geraden Endfläche mit den andern Flächenorten des Schemas ſind die Linien, die ſenkrecht ſtehen auf den Durchſchnittslinien der geraden Endfläche mit den andern Flächen, — ſind die Normalen dieſer Durchſchnittslinien, die Normalen der Seiten der geraden Endfläche. Für die geometriſche Conſtruction der verſchiedenen Seiten der geraden Endfläche bedarf es alſo nur, daß wir auf dieſen vom Flächenorte der geraden Endfläche auslaufenden Radien, Normalen, ſenkrechte Linien errichten, und den arithmetiſchen Ausdruck der Neigungen der Seiten gegen die Dimenſionen der geraden Endfläche anbelan-

Digitized by Google

gend, wiſſen wir, daß dieſem das umgekehrte Neigungsverhältniß der Normalen gegen die Dimenſionen entſpricht, welches Verhältniß unmittelbar vom Schema abzuleſen iſt.

§. 27.

Was wir hier in Bezug auf die gerade Endfläche geſehen haben, wird von jeder andern Fläche, auf der die Projection der Flächenorte entworfen iſt, gelten, und wir wären im Beſitz der Methode, wie die graphiſche Darſtellung die geſuchten Winkelverhältniſſe giebt, nachdem wir uns über die Art verſtändigt haben, wie auf jeder beliebigen kryſtallonomiſchen Fläche die Projection zu entwerfen ſei. Da wir aber zu dem uns Vorliegenden auf eine einfachere und davon unabhängige Weiſe kommen können, und der berührte Gegenſtand ein allgemeineres, und für gewiſſe Kryſtallabtheilungen ſehr wichtiges Intereſſe hat, ſo werden wir ihn in einem beſondern Abſchnitt behandeln.

Jene Radien ſind die Durchſchnittslinien der verſchiedenen Zonenebenen mit der geraden Endfläche, die durch die Normalen der geraden Endfläche und der andern Ebenen beſtimmt ſind; die Neigungen dieſer Radien ſind die der Zonenebenen, weil die gerade Endfläche auf dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitt aller dieſer Zonenebenen ſenkrecht ſteht, alſo auch ſenkrecht auf allen dieſen Zonenebenen.

Für jede andere Fläche ſind die Neigungsverhältniſſe aller der Zonenebenen zu beſtimmen, die durch ihre Normale und die Normalen irgend anderer Flächen ihre Beſtimmung erhalten; — denn die ebenen Winkel der Flächen ſind keine andere, als die Neigungen der Zonenaxen unter einander. Verbinden wir nun den Flächenort irgend einer andern Fläche als der geraden Endfläche mit den übrigen Flächenorten, ſo ſind dieſe ſo gezogene Radien wiederum die Durchſchnittslinien der gedachten Zonenebenen mit der geraden Endfläche, deren Neigungen zu beſtimmen uns vorliegt. Die Neigungen dieſer Radien untereinander ſind hier aber nicht identiſch mit den Neigungen der Zonenebenen, weil

ſie hier nicht entſtanden ſind durch eine Durchſchnittsebene, die auf den Zonenebenen ſenkrecht ſteht. Es iſt hier ein ſchiefer Durchſchnitt der Zonenebenen, wodurch die Radien entſtanden ſind; die Neigungsverhältniſſe der Radien bedürfen alſo, damit ſie die Neigungsverhältniſſe der Zonenebenen werden, gleichſam einer Correction, deren Element die Schiefe des Durchſchnitts wäre. Dieſe Correction wäre allen Neigungsverhältniſſen der Radien deſſelben Ortes gemeinſchaftlich, und wir können wohl von hier aus ſchon überſehen, daß dieſes Gemeinſchaftliche ein Element des gemeinſchaftlichen Grundverhältniſſes der Fläche ſein wird, wozu noch das gemeinſchaftliche Verhältniß für die Neigungen der Radien, a b : 1, kommen muß; und wir überſehen auch wohl weiter, daß die rationalen Vervielfachungen allein von den rationalen Verhältniſſen der Radien abhangen werden.

§. 28.

Von einer andern und allgemeinern Seite der Betrachtung her ſcheint ſich dieſe ſogenannte Correction am einfachſten zu ergeben. Es wurde verlangt für jede in vorliegender Abſicht zu betrachtende Fläche, daß auf ihr die Projection der Flächenorte entworfen würde, um ſo die Schiefe der Durchſchnittsebene nicht berückſichtigen zu dürfen. Es giebt aber eine Fläche, die die Projectionen aller Flächen in ſich begreift, die in die Verſchiedenheit der Kryſtallflächen noch nicht eingegangen iſt, aus der heraus ſich alle Kryſtallflächen erſt individualiſiren — das iſt die Kugelfläche. Statt die Normalen von der geraden Endfläche oder von irgend einer andern begrenzen laſſen, laſſen wir ſie von der Kugelfläche begrenzen. Fig. 20. iſt die Projection der Flächenorte für das Syſtem des Veſuvian auf die Kugelfläche, — Fig. 21. dieſelbe auf die gerade Endfläche *). Auf

*) Die angegebenen Flächenorte gehören zu:

c : ∞ a : ∞ a	a : a : c	$\frac{1}{2}$a : a : c
a : ∞ a : ∞ c	a : ∞ a : c	$\frac{1}{3}$a : a : c

der Kugelfläche iſt jede Zonenebene eine größte Kreisebene, jede Zonenlinie ein größter Kreis. — Nachdem die vier Flächenorte des Grundoctaeders auf die Kugelfläche, nach den aus den Meſſungen ſich ergebenden Neigungen der Normalen der Octaederflächen, aufgezeichnet ſind, ſo können die Orte für die übrigen Flächen nach ihrem bekannten Zuſammenhange mit den Flächen des Grundoctaeders durch Ziehung größter Kreiſe aufgetragen werden. Nämlich durch je zwei anliegende Flächenorte gezogene größte Kreiſe beſtimmen durch ihre vier Durchſchnittspunkte e die Flächenorte der zweiten vierſeitigen Säule. Durch die gegenüberſtehenden Flächenorte des Octaeders gelegte größte Kreiſe beſtimmen durch ihren gemeinſchaftlichen Durchſchnitt den Ort der geraden Endfläche, und durch ihre Durchſchnitte mit dem Kreiſe, der durch die Flächenorte der zweiten vierſeitigen Säule gelegt iſt, beſtimmen ſie die Flächenorte der erſten vierſeitigen Säule b. Die Verbindung des Ortes der geraden Endfläche mit dem der zweiten vierſeitigen Säule, durchſchneidet die Kantenzone des Octaeders in d, d. i. in den Flächenorten des erſten ſtumpfern Octaeders. Die Verbindungen der Orte des Grundoctaeders mit der erſten vierſeitigen Säule, d. i. die Diagonalzonen des Grundoctaeders beſtimmen auf den Kantenzonen des Grundoctaeders den mittlern der drei angegebenen Vier- und Vierkantner u. ſ. w. Es ſcheint überflüſſig, mehr zu ſagen, da das Verfahren durch die Zeichnung (Fig. 20.) hinlänglich erläutert iſt *).

| a : a : ∞ c | a : a : 4c | $\frac{1}{4}$a : a : c |

| a : $\frac{1}{3}$a : ∞ c |.

Außer dem Grundoctaeder, dem erſten ſtumpfern und dem vierten ſchärfern Octaeder, der erſten und zweiten Säule, und der gewöhnlichen vier- und vierkantigen Säule ſind drei Vier- und Vierkantner aus der Kantenzone des Grundoctaeders angegeben, von denen der mittlere zugleich in der Diagonalzone der anliegenden Octaederfläche, der obere zugleich in der Kantenzone des erſten ſtumpfern, und der untere in der Kantenzone des vierten ſchärfern liegt.

*) Für diejenigen, die ſich noch nicht losgeſagt haben vom Gebrauch der ſphäriſchen Trigonometrie im Kryſtallſtudium, und für die

§. 29.

Durch dieſe Conſtruction auf der Kugelfläche haben wir in Bezug auf jede Fläche das erreicht, was uns die Entwerfung des Schemas auf jeder derſelben gewähren würde. Wenn irgend ein Flächenort mit den übrigen verbunden wird durch größte Kreiſe, ſo haben dieſe größten Kreiſe untereinander die Neigungen, die die ebenen Winkel zu 180° ergänzen, die auf der Fläche entſtehen (deren Ort mit den übrigen verbunden iſt) durch die Kantenrichtungen, in denen die übrigen Flächen dieſe ſchneiden. Was in der Projection auf die gerade Endfläche galt, gilt hier für alle Flächen, — da alle Kryſtallflächen mathematiſch in der Kugelfläche enthalten ſind, im Differential ihrer Ausdehnung.

Wenden wir unſere Aufmerkſamkeit auf den Flächenort a des Grunddoctaeders; der Winkel, den die zwei anliegenden Octaederflächen auf der Fläche a bilden, wird ſymmetriſch getheilt, ſo daß deſſen Hälfte b′ae′ iſt — zu deſſen Beſtimmung wir in dem rechtwinkligen Dreieck ab′e′ die Seiten ab′ und b′e′ kennen. — Die den Winkel theilende Linie iſt die Diagonale der

---

Fälle, wo es nützlich ſein kann, ſich derſelben zu bedienen, iſt hier der natürliche Ausgangspunkt gegeben, von wo dieſe Weiſe der Betrachtung ausgehen muß. Es iſt dies eine geometriſche Conſtruction aller ebenen Winkel und aller Kantenwinkel des Kryſtalls, auf der Kugelfläche; der Bogen zwiſchen zwei Flächenorten iſt die Neigung der Normalen der den Orten entſprechenden Flächen, ergänzt deren Neigung gegen einander zu 180°; die ebenen Winkel auf der Kugelfläche ergänzen die ebenen Winkel auf den Kryſtallflächen zu 180°. — Ueberhaupt iſt das geometriſche Studium ſolcher Conſtructionen auf der Kugelfläche ſehr lehrreich, und viele in der Geometrie der Kugel noch nicht gelöſte Probleme dringen ſich auf. Nicht ohne geometriſches Intereſſe ſind ſolche Conſtructionen auf Ellipſoiden, mit denſelben Axen wie das Kryſtallſyſtem, deſſen Flächenorte conſtruirt werden ſollen, — alſo für ein zwei- und zweigliedriges Syſtem ein Ellipſoid mit denſelben Verhältniſſen in den dreierlei Axen, wie ſie das Syſtem hat.

Digitized by Google

Fläche. Verlangen wir den Winkel, den die Durchſchnittslinie der Fläche a mit der Fläche l′ gegen dieſe Diagonale bildet, ſo iſt zu deſſen Beſtimmung in dem rechtwinkligen Dreieck b′ax wieder die Seite ab′ und die Seite b′x gegeben. Für dieſelbe Forderung in Bezug auf h′ und g′ u. ſ. w. haben wir die Dreiecke b′ay, b′az u. ſ. w. — ſtets Dreiecke, in welchen der rechte Winkel bei b′ und die Seite ab′ conſtant iſt, und in welchen nur die anderen Catheten b′e′, b′x, b′y, b′z für jede beſondere Frage variirt.

In einem ſphäriſchen rechtwinkligen Dreieck iſt die Tangente des ſchiefen Winkels gleich der Tangente der gegenüberſtehenden Cathete, dividirt durch den Sinus der anliegenden Cathete. In allen Ausdrücken für die ebenen Winkel um a herum iſt alſo der Sinus von ab′ gemeinſchaftlich, d. i. der Coſinus für die Neigung der Normale von a gegen die Axe des Syſtems. Es ſei dieſe Neigung $= \alpha$, ſo iſt nach Fig. 22. (in welcher 0a und 0c die Richtungen s und c des Syſtems bedeuten, ac die Diagonale der vorliegenden Fläche a, und 0n ihre Normale), $\cos\alpha = \frac{N}{c}$, wenn N die Normale 0n bedeutet. Dieſes $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{N}$ iſt alſo ein beſtändiger Factor für alle Werthe der um den Flächenort a gebildeten Winkel; der Werth von N für eine Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ iſt aber allgemein $\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}\right]}}$. Was den andern, für jeden Fall veränderten Factor in dieſen Werthen anbelangt, die Tangente b′e′, b′x, b′z u. ſ. w., ſo ſind es gerade dieſe Bogen der dritten veränderlichen Seite in dem rechtwinkligen Dreieck, mit denen identiſch ſind die Winkel, die die analogen Zonenlinien von ae′, ax, ay, az u. ſ. w. auf der geraden Endfläche mit der Dia-

Digitized by Google

gonallinie bilden, der die Linie ab' entſpricht. Der Bogen be' in Fig. 20 $= \angle fal$ in Fig. 21., der Bogen $bx =$ dem $\angle fal'$ in Fig. 21., $b'y = \angle fah'$ u. ſ. w. — denn beiderlei Größen ſind die Neigungen der Normalen der verſchiedenen Flächen der horizontalen Zone gegen die Normale der erſten vierſeitigen Säule. — Die Tangenten dieſer Winkel ſind aber immer leicht in dem Schema auf der geraden Endfläche abzuleſen, — und das Produkt dieſer Tangenten mit $\frac{c}{N}$ giebt uns die verlangten Werthe der Neigungsverhältniſſe für die verſchiedenen auf der Fläche a entſtehenden ebenen Winkel. — In Fig. 25. ſind von dem Orte a der Fläche $|a : a : c|$ nach allen übrigen Flächenorten Linien gezogen, (nämlich auf der linken Seite nur) und bezeichnet mit 00, 02, 03 u. ſ. w. Die Tangente der Neigung von 02 gegen $00 = \frac{1}{5}$, der Neigung von 03 gegen $00 = \frac{1}{3}$, von $04 = 1$ u. ſ. w. für die Neigungen von 05, 06, 07, 08, 09; dieſe Tangenten, die das Schema ableſen läßt, ſind die rationalen Verhältniſſe der vorliegenden Fläche; ihr irrationales Verhältniß iſt $\frac{c}{N}$; ſetzen wir annäherungsweiſe $a : c\ \sqrt{7} : \sqrt{2}$ *), ſo iſt $\frac{c}{N} = \sqrt{2}\sqrt{[\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2}]}$ $= \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$. Demnach haben wir, wenn die Tangente der Neigung der Zonenebene von 02 gegen 00 durch tng (2) der Neigung der Ebene von 03 gegen 01 durch tng (3) u. ſ. w. bezeichnet wird:

$$\sin(0) : \cos(0) = 0\sqrt{11} : \sqrt{7}$$
$$\sin(2) : \cos(2) = \tfrac{1}{5}\sqrt{11} : \sqrt{7}$$
$$\sin(3) : \cos(3) = \tfrac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{7}$$

*) Dies Verhältniß $a : c = \sqrt{7} : \sqrt{2}$ giebt den Seitenkantenwinkel zu 74° 10½'; Herr Prof. Mohs a. a. O. giebt dieſen Winkel zu 74° 14' an.

$$\sin(4) : \cos(4) = \sqrt{11} : \sqrt{7}$$
$$\sin(5) : \cos(5) = \sqrt{11} : \tfrac{1}{3}\sqrt{7}$$
$$\sin(6) : \cos(6) = \sqrt{11} : \tfrac{1}{4}\sqrt{7}$$
$$\sin(8) : \cos(8) = \sqrt{11} : \tfrac{1}{5}\sqrt{7}$$
$$\sin(7) : \cos(7) = \sqrt{11} : 0\sqrt{7}.$$

In der Figur 23. ſind dieſe Verhältniſſe für die Neigungungen der Normalen der Kanten auf |a : a : c|, aufgetragen; die beiden Diagonalen eb und ea verhalten ſich wie $\sqrt{11} : \sqrt{7}$. Sollen die Kanten, die auf dieſen Normalen ſenkrecht ſtehen, aufgetragen werden, ſ. Fig. 24., ſo verhält ſich hier umgekehrt ea : eb $= \sqrt{11} : \sqrt{7}$. Die correſpondirenden Zahlen, 1, 2, 3 u. ſ. w. mit denen in Fig. 25., werden den Leſer ſich leicht zurecht finden laſſen.

Für die Fläche des vierten ſchärfern Octaeders |a : a : 4c| ſind in Fig. 25. (auf der rechten Seite der Figur) die Kantennormalen 01, 02, 03 u. ſ. w. gezogen. Die Verhältniſſe für ihre Neigungen gegen 00 giebt die Anſicht des Schema, als irrationales Verhältniß dieſer Fläche

$$\frac{c}{N} = 4.\sqrt{2}\sqrt{\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4^2.2}\right]} = \sqrt{\frac{71}{7}}.$$

Bedienen wir uns derſelben Abkürzung wie vorher, tng (2) für die tng der Neigung der Zonenebene von 02 gegen 00, tng (3) für die Neigung der Ebene von 03 gegen 00 u. ſ. w., ſo giebt die bloße Anſicht des Schema's Fig. 25.:

$$\sin(0) : \cos(0) = 0\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(1) : \cos(1) = \tfrac{1}{11}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(2) : \cos(2) = \tfrac{1}{9}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(3) : \cos(3) = \tfrac{1}{7}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(4) : \cos(4) = \tfrac{1}{5}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(5) : \cos(5) = \tfrac{1}{4}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(6) : \cos(6) = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(7) : \cos(7) = \tfrac{3}{7}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(8) : \cos(8) = \tfrac{1}{2}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$

Digitized by Google

$$\sin(9) : \cos(9) = \tfrac{2}{3}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(10) : \cos(10) = 1\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(11) : \cos(11) = \infty\sqrt{71} : \sqrt{7}.$$

§. 30.

Bei den Flächen der Vier- und Vierkantner ſcheint das Verfahren, nicht völlig ſo einfach und ſchnell zum Ziele gelangend, möglich zu ſein. Zuerſt tritt uns ſchon die Schwierigkeit entgegen, daß hier keine ſymmetriſche Theilung der Neigungen ſtatt findet, und daß damit zugleich die Beſtimmtheit der Richtungen der zwei rechtwinkligen Diagonalen, worauf wir die Verhältniſſe bezogen, wegzufallen ſcheint. Allein von der andern Seite wiſſen wir, daß je zwei rechtwinklige Richtungen gegen einander immer daſſelbe Grundverhältniß haben, ſ. §. 26., und demnach iſt es in Beziehung auf dieſes Grundverhältniß gleichgültig, welches Paar von rechtwinkligen Richtuugen wir zu den Diagonalen, Dimenſionen der Fläche beſtimmen; — nur in Bezug auf die rationalen Verhältniſſe wird dies nicht gleichgültig ſein, ſie haben offenbar ihre Beziehung auf die Hauptrichtungen der Fläche. Die Hauptrichtungen einer Fläche $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ im Allgemeinen ſind wohl ohne Widerrede die durch dieſen ihren Ausdruck angegeben, von $\frac{1}{m}a$ nach $\frac{1}{n}b$, von $\frac{1}{m}a$ nach $\frac{1}{p}c$ von $\frac{1}{n}b$ nach $\frac{1}{p}c$ — ſo daß im Allgemeinen die Betrachtung der Winkelverhältniſſe in Beziehung auf jede dieſer Richtungen und die auf ihr ſenkrecht ſtehende gleich nahe liegt, — nur in Bezug auf den Zuſammenhang dieſer Fläche mit den übrigen Gliedern kann es Richtungen in ihr geben, auf welche die Verhältniſſe der übrigen Richtungen zu beziehen vorzuziehen iſt. Für unſere allgemeine Betrachtung haben wir alſo drei Paare von Diagonalen, nur für die Flächen

Digitized by Google

$\boxed{\frac{1}{m}a : c : \infty b}$, $\boxed{\frac{1}{n}b : c : \infty a}$, $\boxed{\frac{1}{m}a : b : \infty c}$ fallen dieſe drei Paare in Ein Paar zuſammen; die Richtnng von $\frac{1}{m}a$ nach c und die auf dieſer ſenkrecht ſtehende fällt zuſammen, ſowohl mit der Richtung von $\frac{1}{m}a$ nach ∞ b und der auf dieſer ſenkrecht ſtehenden, als auch mit der von c nach ∞ b und der auf dieſer ſenkrecht ſtehenden Richtung. Daſſelbe gilt für $\boxed{\frac{1}{n}b : c : \infty a}$ und für $\boxed{\frac{1}{m}a : b : \infty c}$.

Wir ſetzen zuerſt das Verfahren auseinander, die Winkelverhältniſſe in Beziehung auf das Paar Diagonalen zu beſtimmen, das durch die Richtung von $\frac{1}{m}a$ nach $\frac{1}{n}b$ und durch die auf dieſer ſenkrechten Richtung beſtimmt wird, und richten, zur beſſern Verſtändigung, die Betrachtung gleich zu einer beſondern Fläche, und wählen dazu die Fläche des mittlern Vier- und Vierkantners im Syſtem des Veſuvian $\boxed{\frac{1}{3}a : a : c}$, der in der Projection auf die Kugelfläche der Ort h entſpricht Fig. 20. Da eine Ebene durch c und die Normale dieſer Fläche gelegt, ſenkrecht auf ihrer Richtung von $\frac{1}{3}a$ nach a ſteht, ſo iſt der Durchſchnitt dieſer Ebene mit der zu betrachtenden Fläche die Richtung, die von der Richtung $\frac{1}{3}a$ — a gefordert wird, die ſenkrecht auf ihr ſteht; ihr entſpricht auf der Kugelfläche der größte Kreis chm. Die Verhältniſſe für die Neigungen der von h nach den andern Flächenorten gezogenen Kreiſen gegen hm ſind die geſuchten Neigungsverhältniſſe der ebenen Winkel auf $\boxed{\frac{1}{3}a : a : c}$. Ziehen wir z. B. von h nach b' einen Kreis, ſo gilt es die Beſtimmung des $\angle$ mhb', von h nach f, ſo gilt es die Beſtimmung des $\angle$ mhq u. ſ. w. Alle rechtwinkligen

Digitized by Google

Dreiecke hmb', hmq u. ſ. w. haben die eine Cathete hm wieder gemeinſchaftlich, die andere Cathete verändert, mb', mq u. ſ. w. Wenn die veränderliche Cathete $= v$, die conſtante $= c$, der von der Hypothenuſe bei h gebildete Winkel $= w$, ſo iſt

$$\text{tang}\, w = \frac{\text{tng}\, v}{\sin c}.$$

Der Bogen c iſt die Ergänzung der Neigung der Normale der vorliegenden Fläche gegen die Axe; der Coſinus dieſer Neigung iſt $= \frac{N}{c} = \sin c$; N, die Normale der Fläche $\boxed{\frac{1}{3}a : a : c}$ iſt $= \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right]}}$

$$\text{tng}\, w = \frac{c}{N}\, \text{tng}\, v.$$

Den Werthen der veränderlichen Cathete v, den Winkeln in der horizontalen Zone, entſprechen auch hier wiederum die Neigungen der analogen Zonenlinie gegen die analoge Richtung hm in der Projection auf die gerade Endfläche. Nämlich, wenn wir in dieſer Fig. 26. die Linie 00 ziehen, ſo entſpricht dieſe der hc, und 01 der b', und 02 der hq u. ſ. w.; die Winkel der Bogen mb', mq u. ſ. w. ſind gleich der $\angle\, 0'01$, $0'02$ u. ſ. w.

Alſo bedarf es zur Beſtimmung der Winkelverhältniſſe für die Neigungen der Kantennormalen gegen die Diagonale der Fläche $\boxed{\frac{1}{3}a : a : c}$ nur der Verhältniſſe für die Neigungen, welche die dieſen entſprechenden Zonenlinien in der Projection auf der geraden Endfläche mit der der Diagonale entſprechenden Richtung 00 bilden, und dieſe Verhältniſſe mit dem gemeinſchaftlichen Verhältniß $\frac{c}{N}$ zu vervielfachen.

§. 31.

Wird unſre Fläche in Beziehung auf die zwei anliegenden

Vier- und Vierkantnerflächen betrachtet, wird gefragt nach dem Verhältniß der zweierlei Endkanten gegen die Grundkante, ſo iſt dieſe Frage alſo zurückgeführt auf die Frage: welches iſt Fig. 26. das Verhältniß der $\angle$ 300 und 400; und welches iſt der Werth von $\frac{c}{N}$ für die Fläche $\boxed{\frac{1}{3}a : a : c}$? $\frac{c}{N} = \sqrt{2}\sqrt{[\frac{9}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}]}$ $= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. Tang 300 = 2, tng 400 = 3. Alſo

$$\sin(3) : \cos(3) = 2\sqrt{27} : \sqrt{7}$$
$$\sin(4) : \cos(4) = -3\sqrt{27} : \sqrt{7}.$$

Wird gefragt nach der Richtung, die unſere Fläche mit zwei Flächen des Grundoctaeders gemein hat, d. i. nach der Richtung, deren Normale 05 iſt, ſo iſt für ſie:

$$\sin(5) : \cos(5) = \text{tng}\,(005)\sqrt{27} : \sqrt{7}$$

$$\text{tng}\ 005 = \text{tng}\,(003 - 503) = \frac{2-1}{1+2} = \tfrac{1}{3};\ \text{alſo}$$

$$\sin(5) : \cos(5) = \tfrac{1}{3}\sqrt{27} : \sqrt{7}.$$

Eben ſo iſt für die mit der anliegenden Octaederfläche gemeinſchaftliche Richtung:

$$\sin(6) : \cos(6) = \tfrac{1}{2}\sqrt{27} : \sqrt{7}.$$

Für die Kanten, die nicht zwei anliegende, ſondern zwei abwechſelnde Flächen des Vier- und Vierkantners auf ihr bilden, deren Normalen durch 7 und 8 bezeichnet ſind, iſt:

$$\sin(7) : \cos(7) = \text{tng}\ 007\sqrt{27} : \sqrt{7}$$
$$= \sqrt{27} : \sqrt{7}$$
$$\sin(8) : \cos(8) = {}^{\prime}\sqrt{27} : \sqrt{7}\quad \text{u. ſ. w.}$$

In der Fig. 27. a. ſind dieſe Verhältniſſe aufgezeichnet, und die den Kantennormalen entſprechenden Seiten der Vier- und Vierkantnerflächen mit denſelben Zahlen bezeichnet.

§. 32.

Um das gegebene Verfahren zu verallgemeinern, ziehen wir ein zwei und zweigliedriges Syſtem in Betracht, wo die Gleichheit der zwei Dimenſionen a und b nicht mehr ſtatt findet. Es ſol-

Digitized by Google

ſollen Fig. 27. b. die Winkelverhältniſſe der Fläche |a : b : c| im Syſtem des Topas beſtimmt werden. Für die Neigungen von 3, 4, 5 u. ſ. w. ſind jetzt nicht mehr die Verhältniſſe ſo unmittelbar abzuleſe; ihre Beſtimmung wird aber nicht weniger einfach, wenn wir dieſe Neigungen als die Differenz oder Summe der Neigung von 01, (der Zonenlinie, die die Diagonalzone der Zuſchärfung, in der die vorliegende Fläche liegt, bezeichnet) gegen 00, und der Neigung der jedesmal betrachteten Zonenlinie gegen 01 nehmen, da für dieſe zwei Neigungen einmal die Verhältniſſe unmittelbar auf dem Schema zu erſehen ſind, und dann, weil die eine dieſer Neigungen, nämlich 01 gegen 00 als conſtant in die Rechnung eingeht. — Im vorliegenden Fall iſt tng 001 $= \frac{b}{a}$, und z. B. tng 301 $= \frac{2}{3}\,\frac{b}{a}$, alſo tng 003 $= \frac{ab}{3a^2 + 2b^2}$. Allgemein ſei für die Neiguung der Diagonalzonenlinie gegen 00 tng $= m\frac{b}{a}$, und für die Neigung der zu betrachtenden Zonenlinie gegen dieſe Diagonalzonenlinie tng $= n\frac{b}{a}$, ſo iſt das geſuchte Verhältniß für die Neigung der Zonenlinie gegen 00

$$\text{tng} = \frac{(m-n)ab}{a^2 + mnb^2}.$$

Für die Neigung der Kantennormale gegen die Diagonale auf der zu betrachtenden Fläche iſt demnach der vollſtändige, allgemeine Ausdruck des Verhältniſſes:

$$\text{tng} = \frac{m-n}{a^2 + mnb^2}\,\frac{abc}{N},$$

in welchem der irrationale Theil gänzlich geſondert iſt vom rationalen Theile. Das gemeinſchaftliche, irrationale Verhältniß iſt alſo das Verhältniß der Normale, der Flächenrichtung zum Product der drei rechtwink-

ligen Dimenſionen. Für eine Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ iſt alſo das irrationale Grundverhältniß

$$\frac{abc}{N} = abc \sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right]}.$$

Die Werthe für die einzelnen Neigungsverhältniſſe überſieht man im Folgenden:

$m=1$	n	$\frac{1-n}{5+18n}$	
(1)	0	$\frac{1}{5}$	$\sin(1) : \cos(1) = \sqrt{39} : 5$
(2)	∞	$-\frac{1}{18}$	$\sin(2) : \cos(2) = -\sqrt{39} : 18$
(3)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{51}$	$\sin(3) : \cos(3) = \sqrt{39} : 51$
(4)	2	$-\frac{1}{41}$	$\sin(4) : \cos(4) = -\sqrt{39} : 41$
(5)	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{87}$	$\sin(5) : \cos(5) = -\sqrt{39} : 87$
(6)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{28}$	$\sin(6) : \cos(6) = \sqrt{39} : 28$
(7)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{33}$	$\sin(7) : \cos(7) = 2\sqrt{39} : 33$
(8)	4	$-\frac{3}{77}$	$\sin(8) : \cos(8) = -3\sqrt{39} : 77$

u. ſ. w.

§. 33.

Wir wenden uns jetzt dahin, das Verfahren zu zeigen, wenn die Verhältniſſe der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ ſollen auf die Richtung $\frac{1}{m}a : \frac{1}{p}c$ und auf die, die auf derſelben ſenkrecht ſteht, bezogen werden. Die dieſen zwei Richtungen entſprechenden Ebenen für die Fläche 0 in Fig. 28. ſind die größten Kreiſe b00 und ac, und die Aufgabe reducirt ſich auf die Beſtimmung der Neigungen von den Zonenebenen 01, 02, 03 u. ſ. w. gegen 00, d. i. auf die Beſtimmung der Winkel 001, 002, 003 u. ſ. w. Sie werden durch die Dreiecke 001, 002 u. ſ. w. beſtimmt, und in allen dieſen Dreiecken iſt wiederum die Seite 00 gemeinſchaftlich, d. i. das Complement der Nei-

Digitized by Google

gung der Flächennormale gegen die Axe b. Der Coſinus dieſer Neigung $= \frac{N}{b} = \sin 00$, und demnach iſt:

$$\text{tng}\,(1) = \frac{\text{tng}\,01}{\sin 00}$$

$$\text{tng}\,(1) = \frac{b}{N}\,\text{tng}\,01$$

$$\text{tng}\,(2) = \frac{b}{N}\,\text{tng}\,02 \quad \text{u. ſ. w.}$$

Die Neigungsverhältniſſe für 01, 02, 03 u. ſ. w. ſind aber wiederum leicht auf dem Schema der geraden Endfläche zu finden. — Nehmen wir die vorher unterſuchte Fläche |a : b : c| des Topasſyſtems wieder auf, ſo iſt in Fig. 27. b. die Linie 01 die, welche in Fig. 28. der 00 entſpricht, und die Bogen 01, 02 u. ſ. w. daſelbſt ſind die Neigungen der von den verſchiedenen Zonenlinien in der Verticalzone ac beſtimmten Normalen gegen die Normale a, aus deren Diagonalzone die vorliegende Fläche iſt. Die Neigungen der verſchiedenen Normalen in dieſer Verticalzone gegen die Axe giebt das Schema unmittelbar, und die verlangte Neigung iſt immer die Differenz zweier ſolcher Neigungen. Setzen wir für die Neigung der Normale a gegen die Axe z. B. $\text{tng} = m\frac{c}{a}$, für die Neigung der Normale 3, $\text{tng} = n\frac{c}{a}$, ſo iſt $\text{tng}\,a3 = \frac{(m-n)\,ac}{a^2 + mnc^2}$, und für die Neigung der Kantennormale (3) auf der vorliegenden Fläche

$$\text{tng}\,(3) = \frac{m-n}{a^2 + mnc^2}\,\frac{abc}{N}.$$

Für unſre Fläche |a : b : c| iſt $m = 1$, und für ſie wird der Ausdruck

$$\frac{1-n}{5+n.16}\sqrt{39}.$$

Die leichte Ausführung der Rechnung wird man im Folgenden überſehen:

$m=1$	n	$\frac{1-n}{5+16n}$	
0	0	$\frac{1}{5}$	$\sin(0) : \cos(0) = \sqrt{39} : 5$
1	1	0	$\sin(1) : \cos(1) = \sqrt{39} : \infty$
2	∞	$-\frac{1}{16}$	$\sin(2) : \cos(2) = -\sqrt{39} : 16$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{31}$	$\sin(3) : \cos(3) = 2\sqrt{39} : 31$
4	-1	$-\frac{2}{11}$	$\sin(4) : \cos(4) = -2\sqrt{39} : 11$
5	$-\frac{1}{3}$	-4	$\sin(5) : \cos(5) = -4\sqrt{39} : 1$
6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{26}$	$\sin(6) : \cos(6) = \sqrt{39} : 26$
7	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{47}$	$\sin(7) : \cos(7) = \sqrt{39} : 47$
8	-3	$-\frac{4}{43}$	$\sin(8) : \cos(8) = -4\sqrt{39} : 43$

u. ſ. w.

Es wird nicht nöthig ſein, das Verfahren in Beziehung auf das dritte Paar von Diagonalen aus einander zu ſetzen; wir überſehen leicht, daß der allgemeine Ausdruck in Bezug auf dieſes Paar ſein wird

$$\frac{m-n}{b^2+mnc^2}\,\frac{abc}{N},$$

wenn m hier wie vorher die rationale Vervielfachung des Grundverhältniſſes in der Vertikalzone b — c für die Neigung der Normale, aus deren Diagonalzone die zu unterſuchende Fläche iſt, und n daſſelbe für die von der jedesmaligen Zonenlinie beſtimmte Normale in der Vertikalzone iſt.

§. 34.

Wir haben nun noch das Verfahren in der Anwendung auf die drei- und ſechsgliedrigen Syſteme zu erläutern. Auch hier haben wir im Allgemeinen für jede Fläche $\overset{\frac{1}{p}c}{\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a}}$ drei Hauptrichtungen, nämlich die in ihrem Ausdruck bezeichneten, und alſo mit Inbegriff der drei auf dieſen ſenkrecht ſtehenden Richtungen drei Paare von Diagonalen; — nur bei den

Flächen $\left[\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a\right]^{\frac{1}{p}c}$, wo zwei dieſer Richtungen gleich ſind, unterſcheidet ſich die dritte als eine mittlere, ſymmetriſche, als die Diagonalrichtung im engern Sinne. Für ſolche iſt nun auch hier das Verfahren am einfachſten, wo die Neigungsverhältniſſe auf dieſe ſymmetriſche Richtung bezogen werden. Fig. 29. iſt die Conſtruction der Flächenorte eines rhomboedriſchen Syſtems auf der Kugelfläche. Aus dem Zuſammenhange wird man leicht erkennen, daß, wenn die drei hervorgehobenen Orte den Flächen des Grundrhomboeders entſprechen, das erſte und zweite ſchärfere Rhomboeder, und das erſte ſtumpfere Rhomboeder angegeben ſind, ſo wie der metaſtatiſche Drei- und Dreikantner des Grundrhomboeders, und die erſte und zweite ſechsſeitige Säule. Die Neigungen der Kantennormalen in der Fläche des Grundrhomboeders gegen die Diagonale ſind die Winkel 00′1, 00′2, 00′3... 0′0m. Es iſt $\text{tng}\, 00'm = \frac{\text{tng}\, 0m}{\sin 0'0}$, $\sin 0'0 = \cos 0'0''$ d. h. der Coſinus der Neigung der Normale der Fläche gegen s, alſo $\sin 0'0 = \frac{N}{s}$, und alſo $\text{tng}\, 00'm = \frac{s}{N}\text{tng}\, 0m$. Die tng 0m iſt auf dem Schema des Syſtems auf der geraden Endfläche unmittelbar auf der Richtung, die auf der Richtung s, in welcher der Flächenort des betrachteten Rhomboeders liegt, ſenkrecht ſteht zu leſen. Alle Tangenten von 01, 02, 03 u. ſ. w. ſind Vielfache von $\text{tng}\, 01 = \frac{c\sqrt{3}}{3.s}$, alſo $\text{tng}\, 0'0m = \frac{m}{3}\frac{c\sqrt{3}}{N.}$, ſo daß $\frac{c\sqrt{3}}{N}$ das Grundverhältniß der Rhomboederfläche iſt, und $\frac{m}{3}$ die jedesmalige Vervielfachung deſſelben.

In Fig. 15., in dem Schema des Syſtems des Rothgiltigerzes, wird man ſich analoge Linien mit denen 0′1, 0′2, 0′3, 0′4 in Fig. 29. gezogen denken (es iſt nicht geſchehen, um die

Digitized by Google

Figur nicht zu überfüllen), und in Bezug auf ſie folgende Rechnung leicht überſehen; da $s : c = \sqrt{5} : \sqrt{4}$, ſo iſt

$$\frac{c\sqrt{3}}{N} = \sqrt{4}\,\sqrt{3}\,\sqrt{[\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}]} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{tng } 00'm = \frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Für tng $0'01$, d. i. für die Neigung der Rhomboederkanten auf der Rhomboederfläche gegen die Diagonale derſelben iſt $m = 1$, alſo $\sin(1) : \cos(1) = \sqrt{3} : \sqrt{5}$, d. i. das Verhältniß der beiden Diagonalen der Rhomboederflächen. — Für die Kante, die von der gegenüber liegenden Fläche des zweiten ſchärfern Rhomboeders gebildet wird d. i. für $00'2$

$$\sin(2) : \cos(2) = 2\sqrt{3} : \sqrt{5}$$

Für $00'3$ $\quad \sin(3) : \cos(3) = 3\sqrt{3} : \sqrt{5}$

„ $00'4$ $\quad \sin(4) : \cos(4) = \infty\sqrt{3} : \sqrt{5}$.

Man überzeugt ſich, daß es, um kürzer zum Ziele zu gelangen, keinen andern Weg geben kann. — Für jede andere Rhomboederfläche $\overset{c}{\boxed{\frac{2}{m}s : \frac{1}{m}s : \frac{2}{m}s}}$ iſt der allgemeine Ausdruck ihrer Winkelverhältniſſe gleichfalls:

$$\frac{m}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{N}.$$

So iſt für das erſte ſchärfere $\overset{c}{\boxed{1s : \tfrac{1}{2}s : s}}$

$$\frac{m}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{N} = \frac{m}{3}\sqrt{4}\,\sqrt{3}\,\sqrt{[\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{4}]} = m\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \text{ und}$$

$m = 1$ für die Kanten dieſes Rhomboeders

$$\sin : \cos = \sqrt{7} : \sqrt{5}.$$

Für das zweite ſchärfere $\overset{c}{\boxed{\tfrac{1}{2}s : \tfrac{1}{4}s : \tfrac{1}{2}s}}$

$$\frac{m}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{N} = \frac{m}{3}\sqrt{4}\,\sqrt{3}\,\sqrt{[\tfrac{16}{5} + \tfrac{1}{4}]} = m\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}.$$

Für $\overset{c}{\boxed{4s : 2s : 4s}}$, $\frac{m}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{N} = m\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$

Digitized by Google

Was hier von den Rhomboederflächen nachgewieſen iſt, gilt auch von den Dihexaederflächen, ſo daß für $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a}}$ der allgemeine Ausdruck der Neigungsverhältniſſe iſt: $\frac{m}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{N}$; allgemein iſt hier für die Dihexaederkanten $m = 3$, wie für die Rhomborderkanten $m = 1$ war.

§. 35.

Es bleibt uns noch übrig, den Ausdruck für die Neigungsverhältniſſe einer Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}}$ zu entwickeln. Soll dies in Bezug auf die Richtung $\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s$, und die auf dieſer ſenkrechten geſchehen, ſo ziehen wir Fig. 29., wenn (0′) dort den dieſer Fläche entſprechenden Flächenort vorſtellt, den größten Kreis 0(0′), und ſuchen die Verhältniſſe für die ebenen Winkel, welche von den verſchiedenen Verbindungskreiſen des Flächenorts (0′) mit den andern Flächenorten, mit (0′)0 gebildet werden. Wir werden hier wiederum rechtwinklige Dreiecke haben, die alle eine Seite (0′)(0″) gemeinſchaftlich haben, deren andere Seiten in dem Kreiſe (0″)0″ liegen, und die alſo gemeſſen werden auf dem Schema auf der geraden Endfläche durch die ebenen Winkel, die von Zonenlinien dort gebildet werden, die den Zonenkreiſen hier entſprechen, welche die dritte Seite auf dem Kreiſe (0″)0″ abſchneiden, was nach dem in den vorigen Paragraphen Geſagten keiner Erläuterung weiter bedarf. Das Grundverhältniß der Bogen auf (0″)0″ iſt $\sqrt{3}$, alſo die Tangente der dritten Seite immer $n'\sqrt{3}$; der Sinus von (0′)(0″) iſt wieder gleich dem Coſinus der Neigung der Normale gegen die Axe, $\sin(0')(0'') = \frac{N}{c}$, und daher der

Digitized by Google

allgemeine Ausdruck der Winkelverhältniſſe für die Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}} : \frac{n' c\sqrt{3}}{N}$ — ſo daß $\frac{c\sqrt{3}}{N}$ der allgemeine Ausdruck des irrationalen Grundverhältniſſes für jede Fläche eines drei- oder ſechsgliedrigen Syſtems iſt.

Es ſei Fig. 30. im Schema des Rothgiltigerzes $\overset{\frac{1}{2}c}{\boxed{\frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s}}$ 0', in dieſer Hinſicht zu unterſuchen. Um die Verhältniſſe für die Winkel zu finden, die die Zonenlinien 1, 2, 3 u. ſ. w. mit 00' bilden, ziehen wir auf 00'' die Senkrechte 0'0'', ſo iſt z. B. für 2 der geſuchte Winlel 00'0'' — 20'0'', für 3 derſelbe 00'0'' — 30'0'' u. ſ. w. tng 00'0'' $= \frac{5}{3}\sqrt{3}$, und tng m0'0'' ſei gleich $m\sqrt{3}$, ſo iſt der geſuchte Winkel $\frac{\frac{5}{3} - m}{1 + 5m.}\sqrt{3} = \frac{5-3m}{3(1+5m)}\sqrt{3}$. Alſo iſt der Ausdruck der Winkelverhältniſſe für dieſe Fläche $\frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{5-3m}{3(1+5m)}$. Für 1 iſt $m=0$, für 2 iſt $m = \frac{1}{2}$, für 3 iſt $m = 1$ u. ſ. w. — ſo daß

für 1, $\frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{5-3m}{3(1+5m)} = \frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{5}{3}$.

„ 2, „ „ „ „ $\frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{1}{3}$

„ 3, „ „ „ „ $\frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{1}{9}$. u. ſ. w.

Die Normale einer jeden Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}}$, die vom Mittelpunkte auf ſie gezogene Senkrechte, iſt

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{c^2} + 4\frac{(m^2 + n^2 - mn)}{3s^2}\right]}}.$$

Digitized by Google

Alſo in unſerm Fall, wo $s : c = \sqrt{5} : \sqrt{4}$, und die Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}} = \overset{c}{\boxed{\tfrac{1}{2}s : \tfrac{2}{5}s}}$, iſt

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{4} + 4\frac{4 + \frac{25}{4} - 5)}{15.}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{33}{4.5}}}$$, und

$$\frac{c\sqrt{3}}{N} = \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{5}}.$$

Daher

$$\begin{aligned}
\sin(1) : \cos(1) &= 5\sqrt{11} : \sqrt{5} \\
\sin(2) : \cos(2) &= \sqrt{11} : \sqrt{5} \\
\sin(3) : \cos(3) &= \tfrac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{5} \\
\sin(4) : \cos(5) &= -\sqrt{11} : \sqrt{5} \\
\sin(5) : \cos(5) &= -2\sqrt{11} : \sqrt{5}
\end{aligned}$$ u. ſ. w.

Daß für ſechsgliedrige Syſteme daſſelbe gilt, bedarf keiner Nachweiſung, im Ausdruck werden wir nur s mit a vertauſchen. — Im Quarzſyſtem, ſiehe Fig. 6., iſt für $\overset{c}{\boxed{\tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{5}a}}$, wenn $a : c = \sqrt{5} : \sqrt{6}$,

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{6} + 4\left(\frac{25 + 16 - 20}{3.5}\right)\right]}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{173}{5.6.}}};$$

$\frac{c\sqrt{3}}{N} = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{173}}{\sqrt{5.}}$, und daher der allgemeine Ausdruck der Winkelverhältniſſe für dieſe Fläche $\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{173}}{\sqrt{5}}\,\frac{5 - 3m}{1 + 5m}$.

§. 36.

Ueber die Entwickelung der Winkelverhältniſſe der Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}}$ in Beziehung auf die Richtung $c : \frac{1}{n}s$ und die auf ihr ſenkrecht ſtehende, werden wir uns leicht verſtändigen.

Digitized by Google

Das gemeinſchaftliche irrationale Grundverhältniß iſt der Coſinus der Neigung der Normale dieſer Fläche gegen die auf $\frac{1}{n}s$ ſenkrecht ſtehende Richtung a, (welcher Coſinus $= \frac{s\sqrt{3}}{(2m-n)N}$ iſt), multiplicirt mit dem irrationalen Grundverhältniß für die Neigungen in der vertikalen Zone, in deren Ebene $\frac{1}{n}s$ liegt, (welches irrationale Grundverhältniß $= \frac{c}{s}$ iſt), welches Produkt $= \frac{s\sqrt{3}}{(2m-n)N}\,\frac{c}{s}$ iſt, das irrationale Grundverhältniß alſo $\frac{c\sqrt{3}}{N}$. Die rationale Veränderung des Grundverhältniſſes iſt die rationale Vervielfachung des Verhältniſſes $\frac{s}{c}$ für die Neigungen der verſchiedenen Normalen, die in der vertikalen Zone von den in Betracht gezogenen Zonenlinien beſtimmt werden, gegen die Normale der Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{2}{n}s : \frac{1}{n}s : \frac{2}{n}s}}$, aus deren Diagonalzone die Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}}$ iſt. Dieſe Neigungen ſind die Differenzen der Neigungen dieſer Normale und der jedesmal zu berückſichtigenden Normale gegen die Axe. Die Tangente der Neigung der Normale von $\overset{c}{\boxed{\frac{2}{n}s : \frac{1}{n}s : \frac{2}{n}s}}$ gegen die Axe iſt $n\frac{c}{s}$, und die Neigung der Normale, die von der jedesmaligen Zonenlinie beſtimmt wird, ſei $\nu\frac{c}{s}$, ſo iſt die Tangente für die Differenz beider Winkel, für die Neigung beider Normalen gegen einander

$= \dfrac{(n-\nu)\,\frac{c}{s}}{1+n\nu\,\frac{c^2}{s^2}}$, ſo daß $\dfrac{s^2(n-\nu)}{s^2+n\nu c^2}$ die rationale Vervielfa- von $\frac{c}{s}$ iſt, und der allgemeine Ausdruck der Winkelverhältniſſe der Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}}$, in Beziehung auf die Richtung $c : \frac{1}{n}s$ iſt:

$$\frac{c\sqrt{3}}{N}\,\frac{s^2(n-\nu)}{(2m-n)(s^2+n\nu c^2)}.$$

Für die vorher betrachtete Fläche des metaſtatiſchen Drei- und Dreikantners des Grundrhomboeders im Syſtem des Rothgiltig-Erzes iſt, ſ. Fig. 30.

$$\frac{c\sqrt{3}}{N}\,\frac{s^2(n-\nu)}{(2m-n)(s^2+n\nu c^2)} = \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{5}}\,\frac{2.5(\frac{5}{2}-\nu)}{3(5+5.2\nu)}$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}\,\frac{5-2\nu}{(1+2\nu)}$$

$\nu = \frac{5}{2}$, $\sin(1) : \cos(1) = 0\sqrt{11} : \sqrt{5}$

$\nu = \frac{7}{4}$, $\sin(2) : \cos(2) = \frac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{5}$

$\nu = 1$, $\sin(3) : \cos(3) = 1\sqrt{11} : \sqrt{5}$

$\nu = 0$, $\sin(0) : \cos(0) = \sqrt{11} : \frac{1}{5}\sqrt{5}$

$\nu = 7$, $\sin(4) : \cos(4) = -\frac{1}{5}\sqrt{11} : \frac{1}{3}\sqrt{5}$

$\nu = 4$, $\sin(5) : \cos(5) = -\frac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{5}$ u. ſ. w.

Derſelbe Gang der Entwickelung auf die Richtung $\frac{1}{m}s : c$ in der Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}}$ angewandt, giebt in Beziehung auf dieſe Richtung den allgemeinen Ausdruck der Winkelverhältniſſe

$$\frac{c\sqrt{3}}{N}\,\frac{s^2(m-\mu)}{(2n-m)(s^2+m\mu c^2)}$$

und für die Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{2}s : \frac{2}{5}s}}$: $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}\,\dfrac{5(2-\mu)}{5+8\mu.}$, daher für

$$1,\ \mu = 5,\ \sin(1) : \cos(1) = -\tfrac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{5}$$
$$2,\ \mu = -7,\ \sin(2) : \cos(2) = -\tfrac{1}{17}\sqrt{11} : \tfrac{1}{15}\sqrt{5}$$
$$3,\ \mu = -1,\ \sin(3) : \cos(3) = -\sqrt{11} : \tfrac{1}{5}\sqrt{5}$$
$$0,\ \mu = 0,\ \sin(0) : \cos(0) = \sqrt{11} : \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$4,\ \mu = \tfrac{7}{5},\ \sin(4) : \cos(4) = \tfrac{1}{27}\sqrt{11} : \tfrac{1}{5}\sqrt{5}$$

u. ſ. w.

§. 37.

So iſt die Einfachheit der Methode für die Hauptfragen der kryſtallographiſchen Betrachtnng, glaube ich, vollkommen gewonnen. Beſonders wichtig, und für weitere Unterſuchungen fruchtbar iſt die Unterſcheidung der irrationalen Grundverhältniſſe von ihren rationalen Vervielfachungen; jene ſind das einem beſtimmten Kryſtallſyſteme Eigenthümlichſte, Individuellſte, dieſe ſind abhängig von dem allgemeinen Entwickelungsgange der Glieder eines Syſtems. In Hinſicht der irrationalen Grundverhältniſſe, ſowohl der Zonen als der Flächen, können wir nun das Geſetz derſelben allgemein ausſprechen: das irrationale Grundverhältniß irgend zweier auf einander ſenkrecht ſtehender Richtungen iſt in derſelben Ebene, dieſe ſei eine Zonenebene, oder eine Kryſtallfläche, immer daſſelbe, und dieſes Verhältniß iſt immer das irrationale Verhältniß des Produkts der drei auf einander ſenkrecht ſtehenden Dimenſionen des Syſtems zu der auf der Ebene ſenkrecht ſtehenden Richtung. Alle Grundverhältniſſe eines Kryſtallſyſtems ſind Grundverhältniſſe der Richtungen zu den drei auf einander ſenkrecht ſtehenden Dimenſionen.

Die Richtung der Normale einer Fläche nennen wir die Flächenrichtung, und dann ſind alle irrationale Grundverhältniſſe die Grundverhältniſſe der Kantenrichtungen oder der Flächenrichtungen zu den drei Dimenſionen.

Da wir uns hier nicht auf eine weitere Unterſuchung dieſer irrationalen Grundverhältniſſe einlaſſen können, ſo wollen

Digitized by Google

wir dieſelben doch für die Flächen einiger Syſteme angeben. Die Grundverhältniſſe des regulären Syſtems ſind auf das Beſtimmteſte individualiſirt, ſie haben das Intereſſe der Mathematiker ſchon lange erregt. Es ſind nämlich die Zahlen, die die Summe dreier Quadrate ſind; (indem das Grundverhältniß jeder Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c} = abc\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right]}$ hier wird $\sqrt{[m^2 + n^2 + p^2]}$); die ausgezeichnetſten Mathematiker haben ihre Eigenſchaften in Unterſuchung gezogen, hier bekommen ſie eine naturhiſtoriſche Stellung und Bedeutung. Für die beobachteten Flächen ſind dieſe Grundverhältniſſe:

Für	$\vert a : \infty a : \infty a \vert$	iſt d. Grundverh.	$\sqrt{1} = \sqrt{1^2}$
⸗	$\vert a : a : \infty a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{2} = \sqrt{[1^2 + 1^2]}$
⸗	$\vert a : a : a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{3} = \sqrt{[1^2 + 1^2 + 1^2]}$
⸗	$\vert a : \frac{1}{2}a : \infty a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{5} = \sqrt{[2^2 + 1^2]}$
⸗	$\vert a : a : \frac{1}{2}a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{6} = \sqrt{[2^2 + 1^2 + 1^2]}$
⸗	$\vert \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{9} = \sqrt{[2^2 + 2^2 + 1^2]}$
⸗	$\vert \frac{1}{3}a : a : \infty a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{10} = \sqrt{[3^2 + 1^2]}$
⸗	$\vert \frac{1}{3}a : a : a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{11} = \sqrt{[3^2 + 1^2 + 1^2]}$
⸗	$\vert \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a : a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{14} = \sqrt{[3^2 + 2^2 + 1^2]}$
⸗	$\vert \frac{1}{4}a : \frac{1}{2}a : a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{21} = \sqrt{[4^2 + 2^2 + 1^2]}$
⸗	$\vert \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{22} = \sqrt{[3^2 + 3^2 + 2^2]}$
⸗	$\vert \frac{1}{5}a : \frac{1}{3}a : a \vert$	⸗ ⸗ ⸗	$\sqrt{35} = \sqrt{[5^2 + 3^2 + 1^2]}$

Das Urtheil über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit von Winkelverhältniſſen iſt hier ſehr einfach; unmöglich z. B. ſind hier im regulären Syſtem alle Neigungen, deren Verhältniſſe Vielfache von $\sqrt{7}$ ſind, da 7 nicht die Summe dreier Quadrate iſt.

Für das Syſtem des Quarzes iſt die Form der Flächen-Grundverhältniſſe:

Digitized by Google

$$\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[5+8(m^2+n^2-mn)]}.$$

Daher für $\left[\overset{c}{a : a}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[3^2+2^2]}$ d. Grundverhältniß

$\left[\overset{c}{\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}a}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[6^2+1]}$

$\left[\overset{c}{\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{3}a}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[8^2+3^2+2^2]}$

$\left[\overset{c}{\tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{4}a}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[9^2+6^2+4^2]}$

$\left[\overset{c}{a : \tfrac{1}{2}a}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[5^2+2^2]}$

$\left[\overset{c}{\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[6^2+5^2]}$

$\left[\overset{c}{\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}a}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[10^2+3^2]}$

$\left[\overset{c}{\tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{5}a}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[12^2+5^2+2^2]}$

Vierter Abſchnitt.

Die Projection der Flächenorte auf jeder kryſtallonomiſchen Fläche zu entwerfen.

§. 38.

Das im erſten Abſchnit aus einander geſetzte Verfahren lehrte, wie auf der geraden Endfläche eines Syſtems die Projection der Flächenorte zu entwerfen ſei; — wir werden im Beſitz der Methode, auf jeder kryſtallonomiſchen Fläche dieſe Projection zu entwerfen, ſein, wenn wir uns darüber verſtändigt haben, wie ſie von der Seite der rein mathematiſchen Betrachtung immer als gerade Endfläche angeſehen werden kann. Wir können nämlich die Richtungen des Syſtems, in denen wir die Thätigkeiten uns wirkend denken, deren Verhältniß der Ausdruck der Fläche

iſt, immer in ſolche drei rechtwinklige Richtungen zerlegen, daß die Fläche, auf welcher die Projection zu entwerfen iſt, in Bezug auf dieſe die gerade Endfläche iſt. Die Richtungen der Diagonalen der Fläche, und die Richtung ihrer Normale ſind die drei rechtwinkligen Richtungen, auf welche die Ausdrücke aller Flächen des Syſtems zu reduciren ſind, damit das oben gegebene Verfahren auch hier ſeine Anwendung erleidet. Die Lage der Flächen in dieſen drei Richtungen auszudrücken, iſt ein Problem der Mechanik, nämlich das der Zerlegung der Kräfte. — In dem Ausdruck der Fläche $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ iſt nämlich zugleich das Verhältniß der Thätigkeiten in den drei rechtwinkligen Dimenſionen gegeben, die die Flächenrichtung beſtimmen $\left[\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}\right]$; ſind nun drei andre rechtwinklige Richtungen im Syſteme gegeben, die auf dieſelbe Weiſe dieſe Flächenrichtung durch das Maaß der in ihnen thätig zu denkenden Kräfte beſtimmen ſollen, ſo iſt ja offenbar, daß die Thätigkeiten $\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}$ in dieſe neuen Richtungen müſſen zerlegt werden.

Die Mechanik lehrt, daß, wenn dies Maaß der Kraft einer Richtung a in drei ſenkrechte Richtungen ſoll zerlegt werden, und die Richtung a mit dieſen die Winkel x, y, z bildet, das Maaß der Kräfte in den drei Richtungen iſt $a \cos x$, $a \cos y$, $a \cos z$. Nennen wir die drei andern auf einander ſenkrecht ſtehenden Richtungen in einem Syſteme α, β, γ, und die Winkel, die a mit α, β, γ bildet, x, y, z, die Winkel, die b mit ihnen bildet x', y', z', und die c mit ihnen bildet x'', y'', z'', ſo iſt das Maaß der Kräfte in α, β und γ, deren Reſultante $\frac{m}{a}$ iſt,

$$\begin{array}{ccc} \text{in } \alpha, & \text{in } \beta, & \text{in } \gamma, \\ \frac{m}{a}\cos x & \frac{m}{a}\cos y & \frac{m}{a}\cos z. \end{array}$$

Digitized by Google

Das Maaß derſelben für $\frac{n}{b}$ iſt:

$$\text{in } \alpha, \quad \text{in } \beta, \quad \text{in } \gamma$$
$$\frac{n}{b}\cos x' \quad \frac{n}{b}\cos y' \quad \frac{n}{b}\cos z'$$

und für $\frac{p}{c}$ iſt das Maaß dieſer Kräfte

$$\frac{p}{c}\cos x'' \quad \frac{p}{c}\cos y'' \quad \frac{p}{c}\cos z'',$$

ſo daß die Summe der Kräfte 1) in der Richtung α iſt:

$$\frac{m}{a}\cos x + \frac{n}{b}\cos x' + \frac{p}{c}\cos x'',$$

2) in der Richtung β:

$$\frac{m}{a}\cos y + \frac{n}{b}\cos y' + \frac{p}{c}\cos y'',$$

3) in der Richtung γ:

$$\frac{m}{a}\cos z + \frac{n}{b}\cos z' + \frac{p}{c}\cos z''.$$

Das Verhältniß dieſer drei Summen iſt das, welches dieſelbe Richtung im Kryſtall beſtimmt, welche in den Richtungen a, b, c, durch $\left[\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}\right]$ beſtimmt iſt; daher iſt der Ausdruck der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ in Bezug auf die Richtungen α, β, γ:

$$\frac{1}{\frac{m}{a}\cos x + \frac{n}{b}\cos x' + \frac{p}{c}\cos x''} : \frac{1}{\frac{m}{a}\cos y + \frac{n}{b}\cos y' + \frac{p}{c}\cos y''}$$
$$: \frac{1}{\frac{m}{a}\cos z + \frac{n}{b}\cos z' + \frac{p}{c}\cos z''}.$$

§. 39.

Dieſes Reſultat ſoll in einer Anwendung zuerſt erläutert werden. Wenn die Projection der Flächenorte ſollte auf einer

Fläche

Digitized by Google

Fläche entworfen werden, die auf der Kante $\frac{1}{p}c : \frac{1}{m}a$ in dem Octaeder $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ ſenkrecht ſteht, ſo würde dieſes Octaeder ſo gewendet werden müſſen, daß dieſe Kante vertikal ſteht, denn ihre Richtung wird die von γ; α wird die aus dem Mittelpunkt auf die Kante gezogene Senkrechte; β ſteht auf α und γ ſenkrecht, bleibt alſo mit b identiſch. Nach den aus dieſer Beſtimmung ſich ergebenden Werthen:

$$\cos x = \cos(\alpha..a) = \frac{\frac{1}{p}c}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}} \qquad \cos x' = \cos(\alpha..b) = 0$$

$$\cos y = \cos(\beta..a) = 0 \qquad \cos y' = \cos(\beta..b) = 1$$

$$\cos z = \cos(\gamma..a) = \frac{-\frac{1}{m}a}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}} \qquad \cos z' = \cos(\gamma..b) = 0$$

$$\cos x'' = \cos(\alpha..c) = \frac{\frac{1}{m}a}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}$$

$$\cos y'' = \cos(\beta..c) = 0$$

$$\cos z'' = \cos(\gamma..c) = \frac{\frac{1}{p}c}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}$$

hat man den Ausdruck für die Fläche $\boxed{\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c}$ in dieſen Richtungen α, β, γ:

Digitized by Google

$$\frac{1}{\dfrac{\frac{\mu}{p}c}{a\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}+\dfrac{\frac{\pi}{m}a}{c\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}} : \frac{1}{\frac{\nu}{b}} : \frac{1}{\dfrac{-\frac{\mu}{m}}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}+\dfrac{\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}}$$

$$= \frac{ac\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\mu}{p}c^2+\frac{\pi}{m}a^2} : \frac{b}{\nu} : \frac{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\pi}{p}-\frac{\mu}{m}}$$

$$= \left|\frac{ac}{\frac{\pi}{m}a^2+\frac{\mu}{p}c^2} : \frac{1}{\nu}\,\frac{b}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}} : \frac{1}{\frac{\pi}{p}-\frac{\mu}{m}}\right|$$

Bei zwei- und eingliedrigen Syſtemen iſt es oft ſehr zweifelhaft, welche von den gepaarten Flächen als Säulenflächen zu betrachten ſind, daher wird es nicht ohne Intereſſe ſein, den Gebrauch dieſes Flächenausdrucks an einem zwei- und eingliedrigen Syſteme zu erläutern. Wir wollen das Augitſyſtem ſo ſtellen, daß das den Rhomboidflächen des Feldſpaths entſprechende Paar $\left|-a : \frac{1}{2}b : c\right|$ die Säule bildet. Das Grundverhältniß des Augit iſt:

$$a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{12} : \sqrt{1}$$

und der Werth von $m = 1$, $p = 1$, giebt das Grundverhältniß in den Richtungen

$$\alpha : \beta : \gamma = \sqrt{13} : \sqrt{\tfrac{12}{14}} : 1 = \sqrt{13} : \sqrt{\tfrac{6}{7}} : 1,$$

und die rationale Vervielfachung für die Fläche $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$ iſt

$$\frac{\alpha}{\mu+13\pi} : \frac{\beta}{\nu} : \frac{\gamma}{\pi-\mu}.$$

Die am Augit beobachteten Flächen ſind:

$\lvert a : b : \infty c\rvert$	$\lvert a : \infty b : c\rvert$	
$\lvert \frac{1}{3}a : b : \infty c\rvert$	$\lvert a : \frac{1}{2}b : c\rvert$	$\lvert -a : \frac{1}{2}b : c\rvert$
$\lvert a : \infty b : \infty c\rvert$	$\lvert a : \frac{1}{4}b : c\rvert$	$\lvert -a : \frac{1}{6}b : c\rvert$

Digitized by Google

$|b : \infty a : \infty c|$ $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c|$ $|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c|$

$|c : \infty a : \infty b|$ $|-\frac{1}{5}a : \frac{1}{6}b : c|$

Die Werthe von μ und π in dem Ausdruck der rationalen Vervielfachungen von α, β, γ geſetzt, giebt die Ausdrücke dieſer Flächen in dieſen Richtungen:

$\mu = 1,\ \pi = 0,\ \nu = 1$ $|-\alpha : \beta : \gamma|$

$\mu = 3,\ \pi = 0,\ \nu = 1$ $|-\frac{1}{3}\alpha : \beta : \frac{1}{3}\gamma|$

$\mu = 1,\ \pi = 0,\ \nu = 0$ $|-\alpha : \infty\beta : \gamma|$

$\mu = 0,\ \pi = 0,\ \nu = 1$ $|\infty\alpha : \beta : \infty\gamma|$

$\mu = 0,\ \pi = 1,\ \nu = 0$ $|1\frac{1}{3}\alpha : \infty\beta : \gamma|$

$\mu = -1,\ \nu = 0,\ \pi = 1$ $|\frac{1}{6}\alpha : \infty\beta : \gamma|$

$\mu = -1,\ \nu = 2,\ \pi = 1$ $|\frac{1}{6}\alpha : \beta : \gamma|$

$\mu = -1,\ \nu = 4,\ \pi = 1$ $|\frac{1}{6}\alpha : \frac{1}{2}\beta : \gamma|$

$\mu = -3,\ \nu = 2,\ \pi = 1$ $|\frac{1}{5}\alpha : \beta : \frac{1}{2}\gamma|$

$\mu = 1,\ \nu = 2,\ \pi = 1$ $|\frac{1}{7}\alpha : \beta : \infty\gamma|$

$\mu = 1,\ \nu = 6,\ \pi = 1$ $|\frac{1}{7}\alpha : \frac{1}{3}\beta : \infty\gamma|$

$\mu = 3,\ \nu = 4,\ \pi = 1$ $|-\frac{1}{8}\alpha : \frac{1}{2}\beta : \gamma|$

$\mu = 5,\ \nu = 6,\ u = 1$ $|-\frac{1}{5}\alpha : \frac{1}{3}\beta : \frac{1}{3}\gamma|$

Nach dieſen Ausdrücken läßt ſich die Projection nach dem im erſten Abſchnitt gegebenen Verfahren entwerfen.

§. 40.

Der im §. 38. gegebene allgemeine Ausdruck einer Fläche muß noch weiter entwickelt werden; er erleidet dadurch noch eine Einſchränkung, daß in ihm die Bedingung aufgenommen werden muß, daß α, β, γ kryſtallonomiſche Richtungen ſind, welches dadurch ausgedrückt wird, daß cos x, cos x′, cos y, cos z u. ſ. w. durch die allgemeinſte kryſtallonomiſche Form ausgedrückt werden.

Digitized by Google

Es ſeien in Fig. 31. a. Taf. III. die mit α, β, γ bezeichneten Punkte die Durchſchnittspunkte der durch den Mittelpunkt des Syſtems gelegten Richtungen α, β, γ mit der geraden Endfläche; der Durchſchnittspunkt α ſei beſtimmt durch $\frac{m}{p}\frac{c}{a}$ und $\frac{n}{p}\frac{c}{b}$, (ſo daß die Richtung α beſtimmt wäre durch $\left(\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}\right)$), β durch $\frac{m'}{p'}\frac{c}{a}$ und $\frac{n'}{p'}\frac{c}{b}$, und γ durch $\frac{m''}{p''}\frac{c}{a}$ und $\frac{n''}{p''}\frac{c}{a}$. Der Coſinus von α gegen a iſt gleich dem Sinus von α gegen die Ebene der b c, $= \frac{m}{p}\frac{c}{a}$, dividirt durch die Länge der Richtung α vom Mittelpunkt bis zur geraden Endfläche, d. i.

$$= \frac{\frac{m}{p}\frac{c}{a}}{\sqrt{\left[\left(\frac{m}{p}\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{p}\frac{c}{b}\right)^2 + 1\right]}}$$

Daſſelbe gilt auch in Beziehung auf die Neigungen von α gegen b, von β gegen a u. ſ. w. Daher haben wir:

$$\cos x = \frac{m c}{p a \sqrt{\left[\frac{m^2}{p^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n^2}{p^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

$$\cos x' = \frac{n c}{p b \sqrt{\left[\frac{m^2}{p^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n^2}{p^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

$$\cos x'' = \frac{c}{c \sqrt{\left[\frac{m^2}{p^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n^2}{p^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

$$\cos y = \frac{m' c}{p' a \sqrt{\left[\frac{m'^2}{p'^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n'^2}{p'^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

$$\cos y' = \frac{n' c}{p' b \sqrt{\left[\frac{m'^2}{p'^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n'^2}{p'^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

Digitized by Google

$$\cos y'' = \frac{c}{c\sqrt{\left[\frac{m'^2}{p'^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n'^2}{p'^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}$$

$$\cos z = \frac{m''c}{p''a\sqrt{\left[\frac{m''^2}{p''^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n''^2}{p''^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}$$

$$\cos z' = \frac{n''c}{p''b\sqrt{\left[\frac{m''^2}{p''^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n''^2}{p''^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}$$

$$\cos z'' = \frac{c}{c\sqrt{\left[\frac{m''^2}{p''^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n''^2}{p''^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}$$

Hiernach wird der allgemeine Ausdruck der Fläche $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$

$$\frac{\frac{p}{c}\sqrt{\left[\frac{m^2}{p^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n^2}{p^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}{\frac{\mu m}{a^2}+\frac{\nu n}{b^2}+\frac{\pi p}{c^2}} : \frac{\frac{p'}{c}\sqrt{\left[\frac{m'^2}{p'^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n'^2}{p'^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}{\frac{\mu m'}{a^2}+\frac{\nu n'}{b^2}+\frac{\pi p'}{c^2}}$$

$$: \frac{\frac{p''}{c}\sqrt{\left[\frac{m''^2}{p''^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n''^2}{p''^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}{\frac{\mu m''}{a^2}+\frac{\nu n''}{b^2}+\frac{\pi p''}{c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]}}{\frac{\mu m}{a^2}+\frac{\nu n}{b^2}+\frac{\pi p}{c^2}} : \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{m'}{a}\right)^2+\left(\frac{n'}{b}\right)^2+\left(\frac{p'}{c}\right)^2\right]}}{\frac{\mu m'}{a^2}+\frac{\nu n'}{b^2}+\frac{\pi p'}{c^2}}$$

$$: \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{m''}{a}\right)^2+\left(\frac{n''}{b}\right)^2+\left(\frac{p''}{c}\right)^2\right]}}{\frac{\mu m''}{a^2}+\frac{\nu n''}{b^2}+\frac{\pi p''}{c^2}}$$

In dieſen Werthen müßte nun noch die Relation vom m, m', m'', n, n', n'' u. ſ. w. aufgenommen werden, die dadurch ent-

Digitized by Google

ſteht, daß die Richtungen α, β, γ ſenkrecht auf einander ſtehen. Dadurch bleiben von den 6 Größen $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{m'}{p'}$, $\frac{n'}{p'}$, $\frac{m''}{p''}$, $\frac{n''}{p''}$ nur drei willkührlich, die andern drei beſtimmen ſich aus der Bedingung, daß die betrachteten Richtungen auf einander ſenkrecht ſtehen ſollen. Dieſe Bedingung können wir dadurch ausdrücken, daß wir die Eigenſchaft: daß die Summe der Quadrate der Coſinuſſe der Neigungen von a gegen α, β, γ gleich 1 iſt, und eben ſo die Summe dieſer Quadrate für die Neigungen b gegen α, β, γ u. ſ. w. — mit den gefundenen Werthen in α und β und γ verbinden:

$$\frac{m^2}{a^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]}+\frac{m'^2}{a^2\left[\left(\frac{m'}{a}\right)^2+\left(\frac{n'}{b}\right)^2+\left(\frac{p'}{c}\right)^2\right]}+\frac{m''^2}{a^2\left[\left(\frac{m''}{a}\right)^2+\left(\frac{n''}{b}\right)^2+\left(\frac{p''}{c}\right)^2\right]}=1$$

$$\frac{n^2}{b^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]}+\frac{n'^2}{b^2\left[\left(\frac{m'}{a}\right)^2+\left(\frac{n'}{b}\right)^2+\left(\frac{p'}{c}\right)^2\right]}+\frac{n''^2}{b^2\left[\left(\frac{m''}{a}\right)^2+\left(\frac{n''}{b}\right)^2+\left(\frac{p''}{c}\right)^2\right]}=1$$

$$\frac{p^2}{c^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]}+\frac{p'^2}{c^2\left[\left(\frac{m'}{a}\right)^2+\left(\frac{n'}{b}\right)^2+\left(\frac{p'}{c}\right)^2\right]}+\frac{p''^2}{c^2\left[\left(\frac{m''}{a}\right)^2+\left(\frac{n''}{b}\right)^2+\left(\frac{p''}{c}\right)^2\right]}=1$$

Aus dieſen drei Gleichungen werden ſich drei Größen $\frac{n'}{p'}$, $\frac{m''}{p''}$, $\frac{n''}{p''}$ beſtimmen durch die andern drei $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{m'}{p'}$, und die ſo

Digitized by Google

gefundenen Beſtimmungen in den Flächenausdruck geſetzt, giebt die allgemeinſte Form deſſelben in Beziehung auf alle kryſtallonomiſch möglichen, unter einander ſenkrecht ſtehenden Richtungen.

§. 41.

Zur Erläuterung des Entwickelten diene folgende Anwendung. Ein zwei⸗ und zweiflächiges Octaeder ſoll ſo geſtellt werden, daß eine ſeiner Kanten, die von zweierlei Flächen gebildet wird (eine ein⸗ und einſeitige Kante *)), vertikal ſtehe, daß dieſe Kantenrichtung die Richtung γ ſei; die zweierlei Flächen, die dieſe Kante bilden, ſind anzuſehen als eine ein⸗ und einſeitige Säule, und ſie beſtimmen die horizontale Zone dieſer Stellung. In dieſer horizontalen Zone liegt noch eine Säulenfläche des zwei⸗ und zweiflächigen Octaeders; deren Normale ſoll die Richtung β ſein, ſo iſt α dadurch beſtimmt, daß ſeine Richtung ſenkrecht auf β und γ iſt. Es ſeien Fig. 31. b. Taf. IV. $\frac{mc}{pa}$ und $\frac{nc}{pb}$ die Flächenorte des zwei⸗ und zweiflächigen Octaeders $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{p}c : \infty b\right|$ $\left|\frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c : \infty a\right|$, ſo iſt die Richtung von α die aus dem Mittelpunkt des Syſtems auf die Linie $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ gezogene Senkrechte, da der Durchſchnittspunkt von β mit der geraden Endfläche im Unendlichen der Linie

*) Die Terminologie der Kanten geht davon aus, daß einmal die Seiten jeder Richtung unterſchieden werden, und dann, daß die Stellen des Körpers, welche durch die Kante verbunden ſind, mit in die Bezeichnung der Kante aufgenommen werden müſſen. So ſind in einem zwei⸗ und zweigliedrigen Octaeder nur zwei⸗ und einſeitige Kanten, weil alle Kanten von gleichen Flächen gebildet werden, aber immer zwiſchen zweierlei Stellen des Octaeders liegen. Am viergliedrigen Octaeder ſind die Lateralkanten zweiſeitige Kanten, am zwei⸗ und zweiflächigen Octaeder ſind die Endkanten ein⸗ und einſeitig, die Lateralkanten ſind zweiſeitig. Am Rhomboeder ſind die Endkanten zwei⸗ und einſeitig, die Lateralkanten zweiſeitig.

Digitized by Google

$\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ liegt, (weil β mit ihr parallel iſt). Die Richtung γ iſt die, die ſenkrecht auf der Ebene (α, β) ſteht, alſo ſenkrecht auf der Ebene, die durch den Mittelpunkt und die Linie $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ gelegt iſt. Die Richtung α ſchneidet die gerade Endfläche in dem Punkt, der von der Linie $c\alpha$, (die ſenkrecht auf $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ ſteht), auf $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ beſtimmt wird. Dieſer Punkt wird durch das Verhältniß $\frac{m}{p}\frac{c}{a} = cd$ und $\frac{n}{p}\frac{c}{a} = ce$ beſtimmt, daher hier

$$m = mn^2a^2$$
$$n = nm^2b^2$$
$$p = p(m^2b^2 + n^2a^2),$$

weil $cd = \frac{m}{p}\frac{c}{a} = \frac{mn^2a^2}{p(m^2b^2 + n^2a^2} $ und $ce = \frac{n}{p}\frac{c}{b}$

$$= \frac{nm^2b^2}{p(m^2b^2 + n^2a^2)}\frac{c}{b}.$$

Für den Durchſchnittspunkt von β, im Unendlichen von $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$, durch $\frac{m'}{p'}\frac{c}{a}$ und $\frac{n'}{p'}\frac{c}{b}$ beſtimmt, iſt

$$m' = - m$$
$$n' = n$$
$$p' = 0.$$

Für den Durchſchnittspunkt von γ, ſenkrecht auf der Ebene $\boxed{\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}}$, iſt

$$m'' = - \frac{a^2}{mc^2}$$
$$n'' = - \frac{b^2}{nc^2}$$
$$p'' = \frac{1}{p}.$$

Digitized by Google

Dieſe Werthe von m, n, p, m′, n′ u. ſ. w. in den allgemeinen Ausdruck der Fläche $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}\right|$ des vorigen §. geſetzt, und von den anzuwendenden Reductionen Gebrauch gemacht, giebt

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}}+\frac{1}{\frac{c^2}{p^2}}\right)}}{\frac{\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}}{\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}}+\frac{\frac{\pi}{p}}{\frac{c^2}{p^2}}} : \frac{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]}}{-\frac{\mu m}{a^2}+\frac{\nu n}{b^2}} : \frac{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{-\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}+\frac{\pi}{p}}.$$

Aus dieſem Flächenausdruck kann man unmittelbar jenen §. 39. gegebenen, wo die Endkante eines zwei- und zweikantigen Octaeders in die Richtung γ geſtellt war, herleiten, — er iſt in ſofern allgemein, als man irgend eine Zone zur horizontalen machen kann, wenn β ſenkrecht auf dem Endgliede dieſer Zone ſteht, ſenkrecht auf der Fläche, die aus dieſer Zone zugleich in der horizontalen Zone liegt. Soll alſo die Kantenzone eines zwei- und zweikantigen Octaeders $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ zur horizontalen gemacht werden, und zwar die, welche zwiſchen $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{p}c : \infty b\right|$ und $|b : \infty a : \infty c|$ liegt, ſo tritt hier $|b : \infty a : \infty c|$ anſtatt der Fläche $\left|\frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c : \infty a\right|$, auf welche die Entwickelung bezogen wurde, d. h. es wird $n = \infty$ in dem allgemeinen Ausdruck, und dadurch wird dieſer:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{p^2}{c^2}\right]}}{\frac{\mu m}{a^2}+\frac{\pi p}{c^2}} : \frac{1}{\nu}b : \frac{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\pi}{p}-\frac{\mu}{m}} =$$

$$\left|\frac{ac\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\mu}{p}c^2+\frac{\pi}{m}a^2} : \frac{1}{\nu}b : \frac{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\pi}{p}-\frac{\mu}{m}}\right|$$

Digitized by Google

§. 42.

Nach dieſer allgemeinen analytiſchen Behandlung des Gegenſtandes, auf den wir geführt wurden durch unſer Problem, die Projection der Flächenorte auf jeder beliebigen Kryſtallfläche zu entwerfen, wenden wir uns zu einer ſolchen Löſung dieſer Aufgabe, wie ſie ſich unmittelbar an unſere graphiſche Darſtellung anſchließt. Es muß nämlich durch den ganzen Hergang des Abgehandelten hinlänglich klar geworden ſein, daß, wie der Zuſammenhang aller Glieder mit dem Grundkörper jedes Syſtems durch die bloße Beobachtung der Zonen erkannt wird, ſo auch das Schema auf der geraden Endfläche von dem Grundkörper aus nach dieſem Zuſammenhang der Zonen kann conſtruirt werden. Eine einfache Erläuterung wird das Syſtem des Boraxes geben. Man beobachtet an ihm eine geſchobene vierſeitige Säule, mit abgeſtumpften Seitenkanten, und einer auf der vordern Säulenkante gerade aufgeſetzten ſchiefen Endfläche. Die ſcharfen Endkanten des Hendyoeder, das durch die Säulenfläche und dieſe ſchiefe Endfläche gebildet iſt, haben zwei Abſtumpfungsflächen, eine obere und eine untere; von der untern Abſtumpfungsfläche bildet ſich eine Zone nach der anliegenden vordern Säulenfläche, in welcher eine Fläche aus der Diagonalzone der vordern ſchiefen Endfläche liegt; von dieſer Diagonalfläche bildet ſich eine Zone nach der hintern untern, nicht anliegenden, ſondern gegenüber liegenden Abſtumpfungsfläche der ſcharfen Endkante des Hendyoeders; und in dieſer Zone liegt die obere anliegende Abſtumpfungsfläche der Endkanten des Hendyoeders. — Nach dieſen Beobachtungen der Zonen iſt das Schema des Boraxes in Fig. 32. entworfen; wir ſind ausgegangen von der vordern ſchiefen Endfläche und den hintern untern Abſtumpfungen der ſcharfen Endkante des Hendyoeders, und haben die dieſen Flächen entſprechenden Orte e und g, g′ willkührlich geſetzt, unter der allgemeinen Bedingung, daß e einer ſchiefen Endfläche entſpricht, alſo in der Richtung α liegt, und g, g′ gleiche Flächen aus der Diagonalzone einer hintern ſchiefen Endfläche ſind. Von

dieſen drei Punkten aus beſtimmen ſich alle übrigen beobachteten Glieder; die Flächen der geſchobenen vierſeitigen Säule, parallel mit c, liegen in den Zonen ge, g'e, daher ad ⧺ ge, und ad' ⧺ g'e, d. h. ad und ad' ſind parallel mit den Normalen dieſer Säulenflächen. Von g bildet ſich eine Zone nach der anliegenden Säulenfläche, gi ⧺ ad', und dieſe beſtimmt in der Diagonalzone von der vordern ſchiefen Endfläche ei, den Flächenort i; von i bildet ſich eine Zone nach dem gegenüberſtehenden g', und dieſe beſtimmt in der Zone ge den Flächenort f, wodurch das durch unſere Beobachtung Gegebene erſchöpft iſt.

Solchen Gebrauch werden wir von dieſer Methode der graphiſchen Darſtellung beim Studium eines in ſeiner Gliederung noch nicht gekannten Syſtems immer machen, und daſſelbe Prinzip leitet uns bei der Löſung des uns vorliegenden Problems. Wie nämlich hier von den Flächenorten e, g, g' die Beſtimmung der übrigen Flächenorte ſich ergab durch die Ziehung von Zonenlinien, — ſo bedarf es bei der Entwerfung der Projection der Flächenorte auf irgend eine Ebene nur der Beſtimmung der Flächenorte auf dieſer Ebene, welche die Zonenlinien beſtimmen, deren gegenſeitige Durchſchnittspunkte die Orte der übrigen Flächen ſind. Eine gute Wahl zu dieſen erſten Flächenorten, von denen die übrigen durch Ziehung der Zonenlinien hergeleitet werden ſollen, wird deren immer nur ſehr wenige bedürfen, drei oder vier.

§. 34.

Um dieſe erſten Flächenorte zu beſtimmen, werden wir wiederum darauf zurückgewieſen, daß wir ihre Beziehungen zu zwei rechtwinkligen Dimenſionen der Fläche, auf welcher die Projection entworfen werden ſoll, aufſuchen, zu zwei Diagonalen derſelben. Ein Flächenort iſt auf irgend einer Fläche beſtimmt — wenn die Kantennormale, in der er liegt, durch ihre Neigung gegen die Diagonale beſtimmt iſt, — und wenn die Länge dieſer Kantennormale auf der Fläche, auf welcher die Projection

zu entwerfen iſt, von ihrem Flächenorte bis zu dem Flächenorte, deſſen Lage beſtimmt werden ſoll, gekannt iſt. Durch die Lage der Kantennormale, in Beziehung auf zwei Dimenſionen der Fläche, auf welcher die Entwerfung geſchehen ſoll, und durch die ſo eben bezeichnete Länge dieſer Kantennormale iſt der zu beſtimmende Flächenort fixirt; er iſt es durch die Länge und Lage ſeines Radiusvectors. Die Neigung dieſes Radiusvectors gegen die Dimenſionen der Fläche zu finden, hat der vorige Abſchnitt, und die Länge deſſelben zu beſtimmen, der zweite Abſchnitt gelehrt; denn dieſe iſt ja keine andere, als die Tangente für die Neigung der Normale, die dem zu fixirenden Flächenorte angehört, gegen die Normale, auf deren Fläche der Ort fixirt werden ſoll, wenn dieſe Normale auch hier, wie bei der Entwerfung der Projection auf die gerade Endfläche geſchah, gleich Eins geſetzt wird. Sind ſo dieſe erſten Flächenorte auf der jedesmal vorliegenden Fläche beſtimmt, ſo bedarf es nur, daß wir das Syſtem von Zonenlinien, das uns die Projection auf die gerade Endfläche gewährt, auf dieſe Fläche übertragen.

Ehe wir den Ausdruck der allgemeinen Entwickelung ſuchen, wollen wir das Geſagte in einigen Anwendungen erſt erläutern.

Stellen wir uns die Aufgabe, die Projection der Flächenorte eines rhomboedriſchen Syſtems auf einer Fläche des Grundrhomboeders zu entwerfen, und wählen dazu das Syſtem des Kalkſpaths. Um die Betrachtung einfacher zu erhalten, begnügen wir uns, nur die Flächen des erſten und zweiten ſchärfern Rhomboeders, des erſten ſtumpfern, die Flächen des metaſtatiſchen Drei- und Dreikantners vom Grundrhomboeder, und die Flächen der beiden ſechsſeitigen Säulen außer den Flächen des Grundrhomboeders in Betracht zu ziehen. In Fig. 33. ſind die Orte dieſer Flächen auf die gerade Endfläche projicirt; es ſollen dieſelben auf die Fläche a des Grundrhomboeders projicirt werden. — Die Wahl der erſten Flächenorte, die der Beſtimmung der übrigen Flächenorte zum Grunde liegen ſollen, kann hier nun wohl mit

Digitized by Google

gleichem Vortheil ſehr verſchieden ausfallen; wir könnten z. B. a', a'' und c, oder a', a'' und e, e', oder b', b'' und s, s' u. ſ. w. wählen; überall haben wir nur hier die Lage zweier Flächenorte auf der Rhomboederfläche zu beſtimmen, indem die zwei andern die ihnen entſprechenden ſymmetriſchen ſind. Wir wollen ausgehen von den Punkten d, d', d'' und c, weil deren Beſtimmungen vor den genannten und vor andern das voraus haben, daß bei ihnen die Neigungen der Kantennormalen, in denen ſie liegen (des Radiusvectors) gegen die Diagonale der Rhomboederfläche unmittelbar gegeben ſind, und wir dürfen hier nur die Längen ad', ad, ac auf der Rhomboederfläche beſtimmen, d. i. tng (ad'), tng (ad), tng (ac), wenn die Normale von der Fläche, die dem Orte a entſpricht, $= 1$ iſt, und (ad') die Neigung der Normale des Flächenortes d' gegen die des Flächenortes a u. ſ. w. bezeichnet. Legen wir für das Kalkſpathſyſtem das Verhältniß $s : c = 1 : 1$ zum Grunde, ſo iſt

$$\text{tng}\,(ac) = 1$$

$$\text{tng}\,(ad) = \frac{\text{tng}\,(ac) + \text{tng}\,(dc)}{1 - \text{tng}\,(ac)\,\text{tng}\,(dc)} = \frac{1 + 2}{1 - 2}$$

$$\text{tng}\,(ad) = -3.$$

$$\text{tng}\,(ad') = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

In Fig. 34. werden wir alſo von a, als dem Flächenorte der Rhomboederfläche, auf welcher die Projection entworfen wird, $ac = 1$, $ad = -3$, und $ad' = ad'' = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$ machen, wodurch die Flächenorte d, d', d'' und c auf der Fläche des Grundrhomboeders beſtimmt ſind.

Wie in Fig. 35. die übrigen Flächenorte durch die Zonenlinien beſtimmt ſind, wird man leicht verfolgen können. Der Ort a' iſt beſtimmt durch die Zonenlinien dd' und $d''c$, wie a'' durch dd'' und $d'c$ beſtimmt iſt; der Durchſchnitt von aa' und dd'' beſtimmt s', und der von aa'' und dd' beſtimmt s, die Flächen der zweiten ſechsſeitigen Säule u. ſ. w. Die Sache ſcheint keiner weitern Auseinanderſetzung zu bedürfen.

Digitized by Google

§. 44.

Aus dieſer geometriſchen Beſtimmung der übrigen Flächenorte ergiebt ſich ihre numeriſche ſehr einfach; im Allgemeinen iſt es die Aufgabe der analytiſchen Geometrie, den Durchſchnittspunkt zweier gegebenen geraden Linien zu beſtimmen. Wir erhalten:

$$\mathrm{tng}(ad) = -3$$
$$\mathrm{tng}(ab) = +3$$
$$\mathrm{tng}(a\sigma') = -1$$
$$\mathrm{tng}(ac) = +1$$
$$\mathrm{tng}(am) = +\tfrac{3}{5}$$
$$\mathrm{tng}(an) = -\tfrac{3}{7}.$$

Dieſe Werthe der Tangenten für die Neigungen der verſchiedenen Flächen in der vertikalen Zone, bilden die Reihe:

$$-1,\ +1,\ -\tfrac{1}{3},\ +\tfrac{1}{3},\ +\tfrac{1}{5},\ -\tfrac{1}{7},$$

die ganz analog ſind den Neigungsverhältniſſen der vertikalen Zone der zwei- und eingliedrigen Syſteme, indem die Cotangenten der in Rede ſtehenden Neigungen fortſchreiten in der bekannten Reihe der ungeraden Zahlen:

$$-1,\ +1,\ -3,\ +3,\ +5,\ -7.$$

Dieſe Reflexion führt uns auf ein anderes, bei kryſtallonomiſchen Unterſuchungen häufig wiederkehrendes Problem: es ſind zwei Flächen gegeben, der Kryſtall ſoll ſo geſtellt werden, daß dieſe zu Säulenflächen werden, die Projection der Flächenorte auf der geraden Endfläche dieſer Säule zu entwerfen. Im vorliegenden Falle iſt die Fläche a gegeben, ſie ſoll als gerade Abſtumpfung der vordern Säulenkante (die Säule wird von Flächen aus ihrer Diagonalzone d′, d″ gebildet) gedacht, und die Projection auf der geraden Endfläche dieſer Säule entworfen werden. Für die Neigungen der Flächen der vertikalen Zone gegen die Axe dieſer Stellung ſind die Verhältniſſe der ſie beſtimmenden trigonometriſchen Linien identiſch mit denen, die wir bei den zwei- und eingliedrigen Syſtemen kennen.

Der weſentliche Unterſchied dieſer Aufgabe von der vorigen iſt

Digitized by Google

der, daß die Fläche, auf der die Projection zu entwerfen iſt, nicht im Schema gegeben iſt, ſondern erſt beſtimmt werden muß; iſt ſie beſtimmt, ſo haben wir nur das Verfahren anzuwenden, das wir in ſeiner Allgemeinheit für die Entwerfung der Flächenorte auf jeder beliebigen Fläche ausgeſprochen haben. Im vorliegenden Falle, da die gerade Endfläche in der vertikalen Zone liegen muß, wird ſie dadurch beſtimmt, daß ihre Neigung gegen die Fläche a rechtwinklig iſt. Die mit der Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{2}{m}s : \frac{1}{m}s : \frac{2}{m}s}}$ einen rechten Winkel bildende Fläche iſt $\overset{-c}{\boxed{2ms : ms : 2ms}}$, alſo in unſerem Fall iſt die Projection zu entwerfen auf $\overset{-c}{\boxed{2s : s : 2s}}$ d. i. auf der Fläche des Gegenrhomboeders, deren Ort in Fig. 33. mit x bezeichnet iſt. In Fig. 36. iſt die Projection der Flächenorte auf dieſer Fläche entworfen *).

§. 45.

Es wird hinlänglich ſein, die Allgemeinheit des Verfahrens bei den dreiaxigen Syſtemen zu entwickeln. Es ſeien die Flächenorte des Schwerſpathſyſtems Fig. 37. auf eine Fläche zu projiciren, die die gerade Endfläche ſein würde, wenn dieſes Syſtem ſo geſtellt wäre, daß $\boxed{-a : b : c}$ und $\boxed{-b : c : \infty a}$ zu Säulenflächen würden. Die Zonenlinie de entſpräche alſo

---

*) Geben wir die Ausdrücke der Flächen in den dieſer Stellung entſprechenden Dimenſionen, ſo kann es wohl überraſchen, die große Analogie derſelben mit den Ausdrücken in zwei- und eingliedrigen Syſtemen zu ſehen. Es gilt aber allgemein, *daß zwei- und einflächige Ecken ſowohl wie ein- und einſeitige Kanten, in jeder Abtheilung der Syſteme überall dieſelbe Entwickelung erleiden*; eine nicht unbedeutende Gewährleiſtung für die Naturgemäßheit der Darſtellung des Zuſammenhanges der zwei- und eingliedrigen Syſteme, wie wir ſie in den Abhandlungen des Profeſſor Weiß beſitzen. Die Ausdrücke der Flächen ſind:

Digitized by Google

der horizontalen Zone dieſer Stellung, und da ſie $[-\frac{1}{2}\alpha : -\beta]$ iſt, d. h. durch $-\frac{1}{2}\frac{c}{a}$ und $-\frac{c}{b}$ geht, ſo iſt die Zonenaxe nach §. 14. beſtimmt durch $\left(\frac{2a^2}{c^2}\frac{c}{a} : \frac{b^2}{c^2}\frac{c}{b}\right)$; da aber dieſe Zonenaxe die Normale der geraden Endfläche dieſer Stellung iſt, ſo iſt dieſe $\left|\frac{1}{2a^2}a : \frac{1}{b^2}b : \frac{1}{c^2}c\right|$. Legen wir das Verhältniß $a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{[5+(\frac{1}{2})^2]}$ zu Grunde, ſo wird der Ausdruck dieſer Fläche: $\left|\frac{1}{4}a : \frac{1}{3}b : \frac{4}{21}c\right| = x$ in Fig. 37 *). Auf ihr iſt

b	$\lvert a : c : \infty b\rvert$	a′	$\lvert a : \frac{1}{2}b : c\rvert$	e″	$\lvert a : \frac{1}{6}b : c\rvert$
d	$\lvert -a : c : \infty b\rvert$	e⁗	$\lvert -a : \frac{1}{2}b : c\rvert$		
e	$\lvert \frac{1}{2}a : c : \infty b\rvert$				
σ′	$\lvert -\frac{1}{3}a : c : \infty b\rvert$	s′	$\lvert -\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c\rvert$	σ″	$\lvert -\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}b : c\rvert$
		b′	$\lvert \frac{1}{4}a : \frac{1}{2}b : c\rvert$		
		e′	$\lvert -\frac{1}{7}a : \frac{1}{2}b : c\rvert$		
		d′	$\lvert a : b : \infty c\rvert$		
		s″	$\lvert b : \infty a : \infty c\rvert$		
		a	$\lvert a : \infty b : \infty c\rvert$		

$$a : b : c = 3\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

*) Um auf den Gebrauch allgemeiner analytiſcher Methoden, die noch wenig in der Kryſtallographie beachtet ſind, aufmerkſam zu machen, geben wir hier eine analytiſche Entwickelung für die Beſtimmung der Fläche, die auf zwei gegebenen Flächen ſenkrecht ſteht. Nennen wir die Normale der einen Fläche N, und die der andern N′, und bezeichnen wir mit (N′) die letztre Normale, wenn ſie verlängert wird, bis ſie die andere Fläche ſchneidet, ſo muß, wenn beide Flächen auf einander ſenkrecht ſtehen, $(N') = \infty$ ſein. Die rationale Vervielfachung von N′, damit es (N′) wird, muß alſo $= \infty$ ſein. Die Normale N gehöre der Fläche $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$, ſo iſt $N = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}\right]}}$, und N′ gehöre der Fläche $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$

iſt die Projection der Flächenorte des Schwerſpathſyſtems zu entwerfen.

Um das Verfahren in ſeiner Allgemeinheit zu entwickeln,

ſo iſt $N' = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right]}}$, und wenn N' verlängert wird, bis ſie die Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ ſchneidet, ſo iſt

$$(N') = \frac{1}{\left(\frac{m\mu}{a^2}+\frac{n\nu}{b^2}+\frac{p\pi}{c^2}\right)N'} = \frac{\sqrt{\left[\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right]}}{\frac{m\mu}{a^2}+\frac{n\nu}{b^2}+\frac{p\pi}{c^2}}.$$

Die rationale Vervielfachung von N', damit es (N') wird, iſt alſo $\frac{1}{\left(\frac{m\mu}{a^2}+\frac{n\nu}{b^2}+\frac{p\pi}{c^2}\right)N'^2}$, und dieſe muß, in der Bedingung, daß beide Flächen ſenkrecht auf einander ſtehen, $= \infty$ ſein, d. h. es muß

$$\frac{m\mu}{a^2}+\frac{n\nu}{b^2}+\frac{p\mu}{c^2} = 0$$

ſein. Soll alſo die Fläche $\boxed{\frac{1}{x}a : \frac{1}{y}b : c}$ beſtimmt werden, die mit $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ $\boxed{\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c}$ rechte Winkel bildet, ſo iſt

$$\frac{xm}{a^2}+\frac{yn}{b^2}+\frac{p}{c^2} = 0$$

$$\frac{x\mu}{a^2}+\frac{y\nu}{b^2}+\frac{\pi}{c^2} = 0,$$

aus welchen Gleichungen ſich die Werthe von x und y entwickeln:

$$x = \frac{n\pi - \nu p}{\mu n - m\nu}\,\frac{a^2}{c^2}$$

$$y = \frac{\mu p - m\pi}{\mu n - mn}\,\frac{b^2}{c^2}$$

ſo daß der Ausdruck der zu beſtimmenden Fläche wird:

$$\boxed{\frac{1}{(n\pi - \nu p)a^2}a : \frac{1}{(\mu p - m\pi)b^2}b : \frac{1}{(\mu n - m\nu)c^2}c}$$

$= \boxed{\frac{1}{Ma^2}a : \frac{1}{Nb^2}b : \frac{1}{Pc^2}c}$, wenn M N und P in derſelben Be-

Digitized by Google

werden wir die vier Flächenorte des Grundoctaeders auf der Fläche x beſtimmen, weil von ihnen aus ſich immer alle übrigen Flächenorte durch Ziehung von Zonenlinien herleiten laſſen. Es ſeien Fig. 38. die vier Flächenorte eines Octaeders $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ in a, b, d, f; die Fläche x ſei $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$ und die auf ſie projicirten Orte des Octaeders ſeien in Fig. 39. in a, b, d, f; die Linie xc entſpricht der Linie xc in Fig. 38.

deutung genommen worden, wie im §. 3., und wie ſie überhaupt in dem bisher Abgehandelten gebraucht ſind; ſie ſind die vervielfachenden Werthe von α und β in dem Ausdruck der Zone $\frac{1}{p}(M\alpha : N\beta)$, die durch die Flächen $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ und $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$ beſtimmt wird, — ſie ſind daſſelbe für die Zonenebenen, was wir mit m, n und p im allgemeinen Ausdruck der Flächen bezeichnen.

Wir ſchließen hier füglich an die allgemeine analytiſche Entwickelung des Neigungsverhältniſſes zweier Flächen $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ und $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$; der Coſinus ihrer Neigung iſt $= \frac{N}{(N')}$, wie aus der Anſchauung dieſer Normalen hervorgeht, und deshalb das Neigungsverhältniß:

$$\sin : \cos = \sqrt{[(N')^2 - N^2]} : N.$$

Werden für N, N′, (N′) ihre Werthe geſetzt, ſo iſt

$$\cos = \frac{N}{(N')} = NN'\left(\frac{\mu m}{a^2} + \frac{\nu n}{b^2} + \frac{\pi p}{c^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{\mu m}{a^2} + \frac{\nu n}{b^2} + \frac{\pi p}{c^2}}{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right]}\ \sqrt{\left[\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right)}}$$

sin : cos =

$$\sqrt{\left(\left(\frac{\mu n - m\nu}{ab}\right)^2 + \left(\frac{\mu p - m\pi}{ac}\right)^2 + \left(\frac{n\pi - \nu p}{bc}\right)^2\right)} : \frac{\mu m}{a^2} + \frac{\nu n}{b^2} + \frac{\pi p}{c^2}$$

$$= \sqrt{\left(\left(\frac{M}{bc}\right)^2 + \left(\frac{N}{ac}\right)^2 + \left(\frac{P}{ab}\right)^2\right)} : \frac{\mu m}{a^2} + \frac{\nu n}{b^2} + \frac{\pi p}{c^2}$$

Digitized by Google

Für die Beſtimmung des Punktes a wird nach dem Obigen verlangt, einmal der Winkel axp, und dann die Länge ax. Das Analoge wird für die Beſtimmung der drei andern Flächenorte verlangt. Was dieſe Längen xa, xb u. ſ. w. betrifft, ſo iſt ihre Beſtimmung im vorigen §. angedeutet; — erinnern wir uns aber, daß jeder derſelben eine andere irrationale Grundzahl entſpricht, und daß deshalb die Aufzeichnung nicht ohne Weitläuftigkeit ſein wird, und ſind wir uns bewußt, daß beim weitern Gebrauch dieſer Projection es nur Intereſſe hat, die Beziehungen der projicirten Flächenorte zu zwei Dimenſionen der Fläche x zu kennen, zu xc und xr, ſo werden wir es vorziehen, ſtatt der angegebenen Beſtimmungen z. B. xa und tng axp für a, deſſen Beſtimmung durch pa und qa aufzuſuchen. Nennen wir den $\angle$ axp $= \alpha$, und ax $= 1$, ſo haben wir zwar $xp = \frac{1}{\sqrt{[1 + tng^2 a]}}$, $ap = \frac{1\, tng\, \alpha}{\sqrt{[1 + tng^2 a]}}$; allein wir werden einfacher zur Beſtimmung von xp aus den Verhältniſſen in Fig. 38. auf eine mehr directe Weiſe gelangen. Ziehen wir nämlich in Fig. 38. aus a eine Linie ap ſenkrecht auf cp, und von p eine Linie nach dem Mittelpunkt des Syſtems, ſo iſt dieſe dieſelbe Linie, die in Fig. 39. von p nach dem Mittelpunkt des Syſtems gezogen wird, und bezeichnen wir den Mittelpunkt durch 0, ſo hat 0p gegen 0x dieſelbe Neigung in Fig. 38. und in Fig. 39.; xp iſt aber die Tangente dieſer Neigung, wenn 0x, die Normale der Fläche, worauf die Projection entworfen wird, $= 1$ geſetzt wird; nachdem dieſes xp beſtimmt wäre, hätten wir $ap = xp\, tng\, \alpha$.

Zur Beſtimmung von xp haben wir alſo in Fig. 38. die Tangente von der Neigung von 0x gegen 0p zu ſuchen, welche die Differenz der Neigungen von 0x und 0p gegen die Axe iſt. Die Neigungen gegen die Axe giebt das Schema, wenn p in ſeinen Beziehungen zu den Dimenſionen wie x gekannt iſt. Wir können aber cp auch als Cos. des $\angle$ acp, wenn rad. $=$ ac iſt, betrachten; — $tng\, acp = tng\, (gcp - gca) =$

$\frac{(\nu m - n\mu)ab}{m\mu b^2 + n\nu a^2}$; $\cos acp = \frac{m\mu b^2 + n\nu a^2}{\sqrt{[m^2b^2+n^2a^2]}\sqrt{[\mu^2b^2+\nu^2a^2]}}$;

$\sin acp = \frac{(m\nu - \mu n)ab}{\sqrt{[m^2a^2+n^2b^2]}\sqrt{[\mu^2a^2+\nu^2b^2]}}$. Damit nun $\sqrt{[\sin^2+\cos^2]} = ac = \frac{c}{p}\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]}$ werde, d. h. damit $\cos acp = pc$ und $\sin acp = ap$ werde, müſſen ihre Werthe mit $\frac{c}{p}\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}$ multiplicirt werden, und ſo wird

$$cp = \left(\frac{m\mu}{a^2}+\frac{n\nu}{b^2}\right)\frac{c}{p\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)}}.$$

Dieſer Werth cp iſt die Tang. der Neigung von 0p gegen die Axe; die Tang. für die Neigung 0x gegen die Axe iſt

$$cx = \left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)\frac{c}{\pi\sqrt{\left[\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right]}}.$$

Die Tang. der Differenz beider Neigungen iſt:

$$\operatorname{tng} p0x = \frac{\frac{\mu(\mu p - m\pi)}{a^2}+\frac{\nu(\nu p - n\pi)}{b^2}}{\frac{m\mu}{a^2}+\frac{n\nu}{b^2}+\frac{p\pi}{c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu^2c^2}{a^2}+\frac{\nu^2c^2}{b^2}\right)}}$$

Dieſe Tang. p0x iſt der Werth von xp in Fig. 39.

Es bleibt uns jetzt noch das Neigungsverhältniß für den Winkel axp in Fig. 39. zu beſtimmen. Das Grundverhältniß der Fläche x iſt $\frac{abc}{N} = abc\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right)}$ und

$$\operatorname{tng} axp = \frac{m\nu - n\mu}{\mu(\mu p - m\pi)b^2+\nu(\nu p - n\pi)a^2}\, abc\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{m\nu - n\mu}{\frac{\mu(\mu p - m\pi)}{a^2}+\frac{\nu(\nu p - n\pi)}{b^2}}\,\frac{c}{ab}\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right)}$$

Digitized by Google

Da nun in Fig. 39. ap = px tng axp iſt, ſo haben wir für xp und ap die geſuchten Werthe:

$$xp = \frac{\frac{\mu(\mu p - m\pi)}{a^2} + \frac{\nu(\nu p - n\pi)}{b^2}}{\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2} + \frac{p\pi}{c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu^2 c^2}{a^2} + \frac{\nu^2 c^2}{b^2}\right)}}$$

$$ap = \frac{m\nu - n\mu}{\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2} + \frac{p\pi}{c^2}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right)}}{ab\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right)}}.$$

Dieſe Werthe xp und ap ſind allgemein gültig, und erleiden nur eine Aenderung nach der nähern Beſtimmung der Vorzeichen von m und n, ſo daß z. B. für die Beſtimmung des Flächenortes f, in ihnen ſtatt m und n muß — m, — n geſetzt werden.

Wenden wir uns nun zu dem uns vorliegenden Fall im Schwerſpathſyſtem, ſo haben wir $\mu = 16$, $\nu = 12$, $\pi = 21$, und $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{\tfrac{21}{4}}$, und wir erhalten:

$$xp = \frac{44p - 42m - 21n}{2m + n + p} \cdot \frac{1}{\sqrt{21.44}}.$$

$$ap = \frac{3m - 4n}{2m + n + p} \sqrt{\left(\frac{65}{6.44}\right)}.$$

Für den Flächenort a iſt m = 1, n = 1, p = 1, daher

$$xp = -\tfrac{19}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{44.21}\right)}$$

$$ap = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{65}{6.44}\right)}$$

Für b iſt m = 1, n = -1, p = 1, alſo $xp = \tfrac{23}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{44.21}\right)}$, $ap = \tfrac{7}{2}\sqrt{\left(\frac{65}{6.44}\right)}$. Für f iſt m = — 1, n = — 1, p = 1, und $xp = -\tfrac{107}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{44.21}\right)}$, $ap = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{65}{6.44}\right)}$. Für d iſt

$m = -1$, $n = 1$, $p = 1$, und $xp = \infty$, $ap = \infty$, $\frac{ap}{xp} = -\frac{7}{63}\sqrt{\left(\frac{65.21}{6}\right)}$, d. h. die Normale von d liegt in der horizontalen Zone dieſer Stellung, und hat gegen die Diagonale cx dieſer Stellung eine Neigung, deren Tangente $\frac{7}{63}\sqrt{\left(\frac{65.21}{6}\right)}$ iſt. In Fig. 40. ſind nach dieſen Werthen der Ordinaten der vier Flächenorte des Grundoctaeders dieſelben in a, b, d, f aufgetragen, und zwar d in der Art, daß $\text{tng}\ dxc = \frac{7}{63}\sqrt{\left(\frac{65.21}{6}\right)}$ iſt, wo alsdann d im Unendlichen der Richtung dx liegt. In Fig. 37. iſt jeder Flächenort mit einer beſondern Zahl bezeichnet, und ihnen correſpondiren dieſelben Zahlen für dieſelben Orte in Fig. 40. *). Werden nun dieſe vier Flächenorte durch gerade Linien verbunden (die Verbindung mit d geſchieht bekanntlich, indem mit dx aus den andern Flächenorten Parallellinien gezogen werden), ſo entſtehen drei Durchſchnittspunkte, 11, 12, c, entſprechend den Abſtumpfungsflächen der ſchärfern und der ſtumpfern Seitenkante der Säule des Schwerſpaths und der geraden Endfläche. Durch 11 und 12 iſt die horizontale Zone derſelben beſtimmt, und in ihr werden durch die vorhergezogenen Kantenzonenlinien des Schwerſpath-Octaeders 13 und 14 beſtimmt. Zwiſchen d und f, und c und 12 liegt 1, zwiſchen a und b, und c und 12 liegt 2. Zwiſchen c und 11, und a und d liegt 3, und zwiſchen c und 11, und b und f liegt 4; da aber c — 11 und b — f parallel ſind, ihr Durchſchnittspunkt im Unendlichen liegt, ſo gehört 4 in die horizontale Zone, und ihre Normale iſt parallel mit c — 11 und b — f u. ſ. w. Die Zeichnung weiſet die Beſtimmung der übrigen Flächenorte nach.

---

*) In Fig. 37. ſind die Flächen der horizontalen Zone nicht mit Zahlen bezeichnet; es entſpricht aber dem $\left|b : \infty a : \infty c\right|$ 11, dem $\left|a : \infty b : \infty c\right|$ 12, dem $\left|a : b : \infty c\right|$ 13, dem $\left|a : -b : \infty c\right|$ 14. —

Digitized by Google

§. 46.

Obgleich dieſes in völliger Allgemeinheit angegebene Verfahren ſchon eine ſo große Einfachheit in der wirklichen Ausführung gewährt, ſo wird man doch ſelten Gelegenheit haben, ſich deſſelben bedienen zu müſſen, wenn man die Vortheile bei Unterſuchungen dieſer Art zu benutzen weiß. In dem ſo eben behandelten Falle z. B. bedurfte es nur der Kenntniß der Neigungsverhältniſſe in der Zone de, der horizontalen Zone dieſer Stellung, in welcher die Flächen d, 5, 4 und $|a : -\frac{1}{2}b : \infty c|$ liegen, und der Beſtimmung irgend zweier Flächenorte auf der Fläche x z. B. c und 12, ſo laſſen ſich von dieſen aus, indem mit den Linien, die mit den Normalen der horizontalen Zone dieſer Stellung parallel ſind, Parallelen gezogen werden, die übrigen Flächenorte beſtimmen, wie die Anſicht der Fig. 40. nachweiſet. Beſtimmte man die Fläche x Fig. 37. in ihrem Zonenzuſammenhang mit den übrigen Flächen, ſo bedürfte es nur in Fig. 40. der Beſtimmung des Ortes c, um die übrigen Orte herzuleiten, mit Hülfe der Neigungsverhältniſſe in der Zone de.

Da die Projectionen der Flächenorte auf die verſchiedenen Flächen des regulären Syſtems von einem beſondern Intereſſe beim Studium deſſelben ſind, ſo mögen beiſpielweiſe einige der wichtigſten den Beſchluß dieſes Abſchnittes machen.

In Fig. 41. iſt die Projection der Orte der oben in §. 11. angegebenen Flächen auf der Octaederfläche dargeſtellt. Die Octaederfläche iſt ein gleichſeitiges Dreieck, in deſſen Ecken die Orte der Würfelflächen liegen, und in deſſen Mitte ihr eigener Ort liegt *). Durch dieſe einfache Bemerkung iſt alles gegeben,

*) Die Orte der Würfelflächen ſind in Figur 41. durch kleine Quadrate bezeichnet, die der Octaederflächen durch Dreiecke. Die übrigen Flächenorte ſind nur in einem Sechstheil der Figur bezeichnet, weil es leicht iſt, die übrigen in den andern Sechstheilen liegenden Orte hiernach zu erkennen, da nach Analogie des Rhomboedriſchen hier eine vollkommene Symmetrie in allen Sechstheilen herrſcht. Das Granatoeder iſt durch G, die Pyramidenwürfel ſind durch Pw, die Py-

Digitized by Google

was zur Beſtimmung der übrigen Flächenorte dient. Die Seiten des gleichſeitigen Dreiecks, die Kantenzonenlinien des Würfels führen in die Orte der Granatoederflächen, die ſenkrecht auf der Octaederfläche, auf der die Projection dargeſtellt iſt, ſtehen, die in der horizontalen Zone dieſer Stellung liegen. Deshalb, da die drei andern Octaederflächen zwiſchen den Würfelflächen und dieſen Granatoederflächen liegen, werden die Durchſchnitte der Linien, die aus den Ecken des Dreiecks parallel mit den gegenüberſtehenden Seiten gezogen werden, die Orte dieſer drei andern Octaederflächen ſein. So iſt uns der Würfel mit ſeinem Gegenkörper, dem Octaeder, gegeben, und von ihnen aus werden ſich die übrigen Flächenorte methodiſch beſtimmen laſſen, was bei der hier entſtehenden Mannigfaltigkeit derſelben nicht ohne Werth iſt. Wir ſprechen hier die Regeln dieſer methodiſchen Beſtimmung allgemein, in Bezug auf jede Fläche, auf welcher die Octaeder- und Würfel-Flächenorte beſtimmt ſind, aus *).

1) Man verbinde die **Octaeder-Flächenorte** und **Würfel-Flächenorte** unter einander durch die Octaeder-Kantenzonenlinien und Würfel-Kantenzonenlinien. Die entſte-

---

ramidenoctaeder durch Po, die Leucitoide durch L, die Achtundvierzig-Flächner durch beigeſchriebene Zahlen bezeichnet, und zwar $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ durch 1, $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a|$ durch 2, und $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a|$ durch 3. Eben ſo ſind in den Gattungen der Pyramidenwürfel, Pyramidenoctaeder, und der Leucitoide die Arten durch beigeſchriebene Zahlen unterſchieden, und zwar iſt $|a : \frac{1}{2}a : \infty a|$ durch Pw 2, und $|a : \frac{1}{3}a : \infty a|$ durch Pw 3 bezeichnet, und $|\frac{1}{2}a : a : a|$ iſt durch L 2, $|\frac{1}{3}a : a : a|$ durch L 3, $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a|$ durch Po 2, und $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a|$ durch Po $\frac{3}{2}$ unterſchieden.

*) Dieſe Regeln ſind in dem in §. 11. vom Zuſammenhang der Glieder des ſphäroedriſchen Syſtems Geſagten im Weſentlichen enthalten. — Der Leſer wird zur beſtimmtern Auffaſſung derſelben gut thun, wenn er bei der Leſung derſelben ſogleich ſelbſt die geforderten Linien zieht; er wird ſich ſo überzeugen, daß die Sache viel einfacher iſt, als die Darſtellung ſie zu geben vermag.

Digitized by Google

henden ſechs Durchſchnittspunkte ſind die Orte der Granatoeder-flächen. In unſerm vorliegenden Falle ſind drei der Octaeder-Kantenzonenlinien parallel mit den Würfel-Kantenzonenlinien, woraus ſich ergiebt, daß drei Granatoederflächen in der horizontalen Zone dieſer Stellung liegen.

2) Man verbinde alle Granatoeder-Flächenorte unter einander durch die Granatoeder-Kantenzonenlinien; es ſind deren vier. Die entſtehenden zwölf neuen Durchſchnitte ſind die Flächenorte des Leucitoeders. Im vorliegenden Falle liegen drei derſelben auf der Octaederfläche innerhalb ihrer eigentlichen Begrenzung am Octaeder, ſechs liegen in ihrer weitern Ausdehnung in den Diagonal-Zonenlinien des Würfels, d. i. in den Seiten des Dreiecks, das um das Dreieck der Octaederfläche in ihrer eigentlichen Begrenzung (das wir abgekürzt: Octaeder-dreieck nennen wollen) umſchrieben iſt, zwiſchen jedem Würfelort und Octaederort, und drei Leucitoeder-Flächenorte liegen in der horizontalen Zone; denn die Zonenlinie der drei in der horizontalen Zone liegenden Granatoederflächen wird von den drei durch den Mittelpunkt des Schema gehenden Octaeder-Kantenzonenlinien in drei Punkten geſchnitten, die Orten von Leucitoederflächen angehören.

3) Man verbinde jeden Granatoeder-Flächenort mit jedem Octaeder-Flächenort. In ſofern die Granatoederflächen in den Kantenzonen des Octaeders liegen, iſt die Verbindung ſchon in 1) geſchehen; alle übrigen, hier geforderten Verbindungslinien entſprechen den Diagonalzonenlinien des Octaeders. Im vorliegenden Falle wird jeder der drei Granatoeder-Flächenorte, die in der Mitte der Seiten des Octaeder-dreiecks liegen, mit den zwei Octaederflächen, zwiſchen welchen er nicht liegt, verbunden, und um das Dreieck, deſſen Ecken die drei Octaederflächenorte ſind, wird ein neues Dreieck, das mit ihm parallele Seiten hat, beſchrieben. Die Seiten dieſes umſchriebenen Dreiecks ſind die Verbindungslinien zwiſchen den Octaeder-Flächenorten und den Granatoeder-Flächenorten der ho-

Digitized by Google

rizontalen Zone. Durch dieſe Diagonalzonenlinien des Octaeders, deren immer zwölf ſind, werden in den ſchon gezogenen Linien, indem ſie dieſe durchſchneiden, die Flächenorte beſtimmt von dem Pyramidenwürfel $|a : \frac{1}{2}a : \infty c|$, von dem niedern Leucitoid $|a : a : \frac{1}{3}a|$, und von den Sechsmalacht-Flächnern $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ und $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a|$.

a. In den Würfelkantenzonenlinien entſtehen zwölf Durchſchnittspunkte, ſie ſind die Flächenorte des genannten Pyramidenwürfels $|a : \frac{1}{2}a : \infty a|$. Im vorliegenden Falle liegen ſechs von ihnen in den Seiten des Octaederdreiecks, und ſechs liegen in den Seiten des ſo eben erwähnten zweiten umſchriebenen Dreiecks, wo dieſe von den verlängerten Seiten des Octaederdreiecks geſchnitten werden.

b. In den Octaederkantenzonen-Linien entſtehen gleichfalls zwölf Durchſchnittspunkte, ſie ſind die Flächenorte des erwähnten niedern Leucitoids $|a : a : \frac{1}{3}a|$; in unſerm vorliegenden Falle liegen drei derſelben innerhalb des Octaederdreiecks, ſechs in den Seiten des um daſſelbe umſchriebenen Dreiecks, deſſen Ecken die Octaederflächenorte ſind, und drei in den Ecken des um dieſes umſchriebenen Dreiecks.

c. In den Granatoederkantenzonen-Linien entſtehen vierundzwanzig Durchſchnittspunkte, ſie ſind die Flächenorte des erwähnten Pyramidengranatoeders $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$. Von ihnen liegen in unſerm Falle hier ſechs innerhalb des Octaederdreiecks, ſechs innerhalb des Dreiecks, das um dieſes umſchrieben iſt, und ſechs in den Seiten des Dreiecks, das um dieſes wiederum umſchrieben iſt, und endlich liegen ſechs von ihnen in der horizontalen Zone dieſer Stellung des ſphäroedriſchen Syſtems; denn da dieſe eine Granatoederkantenzone iſt, ſo wird ihre Zonenlinie gleichfalls geſchnitten. Dieſe in dieſer horizontalen Zone liegenden Flächen von $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ haben ihren Ort im Unendlichen der Diagonalzonenlinien des Octaeders.

Digitized by Google

d. Die **Diagonalzonenlinien** des **Octaeders** durchſchneiden ſich gegenſeitig in vier und zwanzig Punkten, und beſtimmen ſo die Flächenorte von $\left|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a\right|$. In unſerm Falle liegen ſechs von ihnen innerhalb des Octaederdreiecks, ſechs innerhalb des um dieſes umſchriebenen Dreiecks, und ſechs in den Seiten des um dieſes wiederum umſchriebenen Dreiecks, und ſechs in den Verlängerungen dieſer Seiten *).

4) Man verbinde **jeden Leucitoederflächenort mit jedem Würfelflächenort**; — dies geſchieht durch die Linien der Kantenzonen der vierflächigen Ecken des Leucitoeders, durch die vier Kantenzonenlinien jeder vierflächigen Ecke deſſelben **). Es ſind dieſer Zonenlinien immer zwölf.

a. Mit den **Würfelkantenzonen-Linien** entſtehen durch dieſe Kantenzonenlinien des Leucitoeders keine neuen Durchſchnitte; in ihnen wird kein neues Glied beſtimmt.

b. In den **Octaederkantenzonen-Linien** entſtehen zwölf Durchſchnittspunkte, die die Flächenorte des Pyramidenoctaeders $\left|\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : a\right|$ ſind. Im vorliegenden Falle ſind drei von ihnen innerhalb des Octaederdreiecks, drei innerhalb des um daſſelbe umſchriebenen Dreiecks, und ſechs in den verlängerten Seiten deſſelben.

c. In den **Granatoederkantenzonen-Linien** entſteht kein neuer Durchſchnittspunkt, in ihnen wird kein neues Glied hervorgerufen.

d. In den **Diagonalzonenlinien** des **Octaeders** werden die Orte für 3 verſchiedene Achtundvierzig-Flächner beſtimmt,

---

*) In der Figur ſind dieſe letzten ſechs Orte nicht angegeben, damit die übrigen Orte nicht zu ſehr in einander gedrängt werden möchten. Die an der Verlängerung der Seite des erwähnten Dreiecks geſetzte, in Klammern eingeſchloſſene Zahl (3), möge den Leſer auf dieſes Fehlen aufmerkſam machen.

**) In ſofern dies Leucitoeder zwiſchen dem Würfel und dem Octaeder liegt, iſt die Verbindung zwiſchen Leucitoeder und dem Würfel ſchon da durch die Octaederkantenzonen-Linien.

Digitized by Google

nämlich für $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a|$, für $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a|$ und für $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ von denen der erſte bis jetzt nur als beobachtet bekannt iſt, der zwiſchen dem niedern Leucitoid und $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a|$ liegt; deshalb müſſen die zwiſchen dieſen zwei Gliedern entſtehenden Durchſchnittspunkte auf den Diagonalzonenlinien des Octaeders als die Orte von $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a|$ bezeichnet werden.

Im vorliegenden Falle liegen ſechs von den Flächenorten dieſes Achtundvierzig-Flächners innerhalb des Octaederdreiecks, ſechs in dem umſchriebenen Dreiecke, und ſechs innerhalb des um dieſes umſchriebenen Dreieckes, und ſechs in deſſen verlängerten Seiten *).

5) Man verbinde jeden Leucitoederflächenort mit jedem Granatoederflächenort **), welches durch die Linien der Kantenzonen der dreiflächigen Ecken des Leucitoeders geſchieht.

a. In den Kantenzonen des Würfels entſtehen zwölf neue Durchſchnittspunkte; ſie entſprechen den Flächenorten des Pyramidenwürfels $|a : \frac{1}{3}a : \infty a|$. In unſerm Falle liegen ſechs in den Seiten des Octaederdreiecks, und ſechs in den verlängerten Seiten deſſelben.

b. In den Kantenzonenlinien des Octaeders entſtehen 24 neue Durchſchnittspunkte, ſie ſind die Flächenorte des Pyramidenoctaeders $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|$ und des Leucitoides $|\frac{1}{4}a : a : a|$; letzteres iſt als beobachtet noch nicht bekannt. Die zwölf zwiſchen den Granatoederflächenorten und den Octaederflächenorten entſtehenden Durchſchnittspunkte müſſen als die Flächenorte von

*) Die letzten ſechs Orte fehlen wieder in der Fig. 41.; die an die verlängerte Seite des Dreiecks geſchriebene (2) ſoll dieſes andeuten.

**) In ſofern das Leucitoeder in der Kantenzone des Octaeders liegt, und in der Kantenzone des Granatoeders iſt dieſe Verbindung ſchon da.

$|\frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|$ bezeichnet werden. In unſerm vorliegenden Falle liegen drei von ihnen innerhalb des Octaederdreiecks und drei innerhalb des um dieſes umſchriebenen Dreiecks, und ſechs in deſſen verlängerten Seiten.

Hiermit iſt das, was die Beobachtung bis jetzt hat kennen gelehrt, erſchöpft. Dieſe angegebenen (fünf) Regeln mit ihren Nebenbeſtimmungen gelten für jede Projection der Flächenorte auf irgend eine Fläche, und für die fortſchreitende Beobachtung neuer Glieder können ſie nur in demſelben Sinne, wie ſie hier ausgeſprochen ſind, weiter fortgeführt werden *). Für einzelne Glieder, die unter den durch das angegebene Verfahren beſtimmten nicht begriffen ſind, wird man am einfachſten durch die Ziehung der Zonenlinien, die zu ihrer unmittelbaren Beſtimmung allein dienen, die Orte in der jedesmaligen Projection erhalten. —

---

*) Die Deduktion der bekannten Flächen erforderte nur die Combination der Kantenzonen der dreiflächigen Ecken des Leucitoeders mit den Würfelkantenzonen und den Octaederkantenzonen. Zur vollſtändigen Kenntniß derjenigen Glieder, die durch den Conflikt dieſer Zonen mit den ſchon daſeienden hervorgerufen werden, fügen wir dem Vorhergehenden hinzu:

c. In den Kantenzonenlinien des Granatoeders entſtehen keine neue Durchſchnittspunkte, in ihnen werden keine neue Glieder hervorgerufen.

d. In den Diagonalzonenlinien des Octaeders werden durch die Kantenzonen der dreiflächigen Ecken des Leucitoeders beſtimmt die Achtundvierzig-Flächner $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a|$, $|a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{7}a|$ und $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{7}a|$.

e. In den Kantenzonenlinien der vierflächigen Ecken des Leucitoeders entſtehen zweierlei Durchſchnittspunkte, ſie ſind die Flächenorte von $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{6}a|$ und $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{7}a|$.

Es kann dem Leſer nicht entgehen, wie hiermit der allgemeine Entwickelungsgang des regulären Syſtems ausgeſprochen iſt, gleichſam der mittlere, der die Individualität der Entwickelung der einzelnen Gattung aufhebt. Dieſes weiter zu verfolgen, wird eine ſpätere, beſondere Betrachtung des regulären Syſtems Gelegenheit geben.

Die Normalen der Octaederflächen liegen zwiſchen den drei Grunddimenſionen des regulären Syſtems, ſo daß ſie zu jeder derſelben gleiche Beziehung haben, — deshalb haben ſie drei gleiche Seiten (latera), die Octaederrichtungen ſind dreiſeitig. Deshalb müſſen die Beziehungen der Glieder des ſphäroedriſchen Syſtems auf ſie eine vollkommene Analogie mit den Verhältniſſen in den rhomboedriſchen Syſtemen gewähren; und unſere Projection Fig. 41. weiſet dieſe in jeder Beziehung nach *).

---

*) In der Projection gehören die im Octaederdreieck liegenden Flächenorte einer Ecke des Würfels, wenn er rhomboedriſch geſtellt wird, an. Beziehen wir die den drei andern ihr gleichen Würfelecken angehörigen Flächen auch auf ſie, ſo können wir in der Terminologie der rhomboedriſchen Syſteme die in Figur 41. projicirten Glieder folgendermaßen bezeichnen. Vom Würfel ausgegangen haben wir das erſte, zweite und dritte ſtumpfere Rhomboeder, und das erſte und zweite ſchärfere, deren Orte die Ecken der in- und umſchriebenen Dreiecke in Bezug auf das Octaederdreieck ſind. In der Kantenzone des Würfels, in der Terminalhälfte ſind die Glieder mit 2fachem und 3fachem Sinus, bei gleichem Coſinus, in der Lateralhälfte, die mit 2fachem und 3fachem Coſinus bei gleichem Sinus. In der Kantenzone des erſten ſtumpfern Gliedes der Hauptreihe ſind da, in der Terminalhälfte: das Glied mit 3fachem Sinus, in der Lateralhälfte: die Glieder mit 2fachem, 3fachem und und 5fachem Coſinus. Aus der Kantenzone des zweiten ſtumpfern Gliedes das Glied mit 3fachem Coſinus, bei gleichem Sinus, und aus der Kantenzone des dritten ſtumpfern Gliedes der Hauptreihe das Glied mit 8fachem Coſinus bei gleichem Sinus. In der Terminalhälfte der Kantenzonen des erſten ſchärfern Gliedes ſind die Glieder mit 2fachem und 3fachem Sinus, und in der Lateralhälfte die mit $\frac{1}{2}$fachem und 2fachem Coſinus. In der Terminalhälfte der Kantenzone des zweiten ſchärfern Gliedes ſind die Glieder mit 2fachem, 3fachem und 4fachem Sinus, in der Lateralhälfte die mit $\frac{1}{2}$fachem und 2fachem Coſinus. Aus der vertikalen Zone der zweiten ſechsſeitigen Säule ſind die Glieder hier, die in Vergleich mit dem Gliede dieſer Zone, das zugleich in der Kantenzone des Würfels liegt, für ihre Neigung gegen die Axe $\frac{1}{2}$fachen und 2fachen Sinus haben, bei gleichem Coſinus, und die 2fachen, 3fachen und 4fachen Coſinus bei gleichem Sinus haben. Aus der Vertikalzone der erſten ſechsſeitigen Säule ſind außer den Gliedern der Hauptreihe, ein Rhomboeder erſter Ordnung zwiſchen dem Würfel und dem zweiten ſtumpfern Gliede, nämlich das mit $\frac{5}{2}$fachem

§. 47.

In Fig. 42. iſt die Projection der Flächenorte auf der Granatoederfläche entworfen. Die Granatoederfläche ſelbſt giebt uns wiederum alle Beſtimmungen, um den im vorigen §. angegebenen Gang der Zonenentwickelung zu conſtruiren und damit die Flächenorte zu beſtimmen. Nämlich zwei gegenüberſtehende Ecken an der längern Diagonale des Rhombus, deſſen Diagonalen ſich verhalten wie $1 : \sqrt{2}$, entſprechen zweien Würfelflächenorten, und der Ort der dritten Würfelfläche liegt im Unendlichen der kleinen Diagonale. Die beiden andern gegenüberſtehenden Ecken an der kürzern Diagonale entſprechen zweien Octaederflächenorten, und die Orte der zwei andern Octaederflächen liegen im Unendlichen der Seiten des Rhombus der Granatoederfläche. Es ſind uns alſo die Flächenorte des Würfels und des Octaeders gegeben, und wenn wir von ihnen aus die im vorigen §. angegebenen Combinationen conſtruiren, gelangen wir zu allen übrigen Flächenorten. — Die Bezeichnung der einzelnen Flächenorte iſt dieſelbe, die im vorigen §. angegeben iſt.

Die Richtung der Granatoederfläche, ihre Normale, liegt zwiſchen zwei Grundrichtungen des Syſtems, und zwiſchen zwei octaedriſchen Richtungen, iſt zwei und zweiſeitig, deshalb müſſen

---

Sinus bei gleichem Coſinus mit der Würfelfläche in der Neigung gegen die Axe — und zwei Rhomboeder zweiter Ordnung, nämlich das mit 5fachem Sinus und das mit $\frac{1}{4}$fachem Coſinus — und dann liegt in dieſer Zone noch das Gegenrhomboeder des Würfels u. ſ. w. Das Schema giebt dieſe Beziehungen alle unmittelbar, und faſt eben ſo unmittelbar gelangt man zu den Ausdrücken dieſer Flächen in Bezug auf die Richtungen in der uns vorliegenden Octaederfläche. Nämlich um in den rhomboedriſchen Dimenſionen des Würfels dieſe Ausdrücke zu geben, würde man die aus dem Mittelpunkt des Octaederdreiecks nach deſſen Ecken gezogenen Linien als die Einheiten von σ, σ' und σ'' nehmen, und durch die Verhältniſſe von ihren Vervielfachungen jeden Ort beſtimmen.

Für die Berechnung der Neigungsverhältniſſe iſt der Werth von dieſer Einheit von $\sigma = \sqrt{2}$.

Digitized by Google

die Glieder des ſphäroedriſchen Syſtems auf ſie bezogen eine vollkommene Analogie mit dem Zwei- und Zweigliedrigen gewähren. Die Anſicht und die genauere Betrachtung des Schema wird dieſes in jeder Beziehung beſtätigen. —

Sollte die Projection der Flächenorte auf der Fläche eines Achtundvierzig-Flächners entworfen werden, ſo wird man im Allgemeinen ſich des Dreiecks bedienen können, das für die Fläche durch die drei in ihrem Ausdruck $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ gegebene Beſtimmungen in den drei Grunddimenſionen beſtimmt iſt, des Dreiecks, das entſteht, wenn man die drei angegebenen Punkte $\frac{1}{m}a$, $\frac{1}{n}a$, und $\frac{1}{p}a$ durch gerade Linien verbindet. Nach den dreierlei Seiten dieſes Dreiecks, nämlich $m\sqrt{[n^2+p^2]}$ und $n\sqrt{[m^2+p^2]}$ und $p\sqrt{[m^2+n^2]}$, wird man daſſelbe entwerfen, und dadurch ſind die drei Würfelflächenorte auf dieſer Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ beſtimmt.

Theilt man nun die Seite $m\sqrt{[n^2+p^2]}$ in zwei Theile, die ſich verhalten wie $\frac{1}{n} : \frac{1}{p}$, und die Seite $n\sqrt{[m^2+p^2]}$ in zwei Theile, die ſich verhalten wie $\frac{1}{m} : \frac{1}{p}$, und die Seite $p[\sqrt{m^2+n^2}]$ wie zwei gleiche Theile, die in dem Verhältniß $\frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ ſtehen, und verrichtet dieſe Theilung in der Art, daß die Theile $\frac{1}{m}$ auf $n\sqrt{[m^2+p^2]}$ und $\frac{1}{m}$ anf $p\sqrt{[m^2+n^2]}$ an derjenigen Ecke dieſes Dreiecks liegen, die in $\frac{1}{m}a$ der Grunddimenſion liegt, und daß eben ſo die Theile $\frac{1}{n}$ auf $m\sqrt{[n^2+p^2]}$ und $\frac{1}{n}$ auf $p\sqrt{[m^2+n^2]}$ an der Ecke dieſes Dreiecks liegen, die

Digitized by Google

die in $\frac{1}{n}a$ der Grunddimenſion liegt, und eben ſo in Hinſicht auf den Theil $\frac{1}{p}$ auf $m\sqrt{[n^2+p^2]}$ und auf $n\sqrt{[m^2+p^2]}$, — theilt man auf dieſe Art die Seiten des Dreiecks, ſo ſind in dieſen Theilungspunkten die Orte dreier Granatoederflächen gegeben. Ihre Verbindungslinien ſind die Kantenzonenlinien des Granatoeders, ſie ſchneiden die verlängerten Seiten unſers Dreiecks in drei andern Punkten, entweder im Endlichen oder im Unendlichen, und dieſe drei Durchſchnittspunkte ſind die Orte der drei andern Granatoederflächen. Die nun noch nicht gezogenen Verbindungslinien zwiſchen den Würfelflächenorten und den Granatoederflächenorten ſind die Kantenzonenlinien des Octaeders, und ihre gegenſeitigen Durchſchnittspunkte beſtimmen die Flächenorte des Octaeders. Nun, da die Flächenorte des Würfels und des Octaeders beſtimmt ſind, treten die im vorigen §. gegebenen Regeln wieder in Anwendung. —

§. 48.

Es wird in vielen Fällen von weſentlichem Vortheil ſein, ſich dieſer Projectionen auf die verſchiedenen Flächen des regulären Syſtems zu bedienen, z. B. bei Unterſuchungen über die hemiedriſchen Geſtalten. Wollte man unmittelbar und allein die Geſtalt der Begrenzungsflächen haben, ſo wird man ſich hier auch mit Vortheil der im §. 45. gegebenen Formeln für die Beſtimmung der Flächenorte bedienen. Es ſoll z. B. das Fünfeck conſtruirt werden, das den Begrenzungsflächen des Granatdioeders *) von $\boxed{a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a}$ zukömmt. Von den fünf

*) Granatdioder wird der Körper genannt, der entſteht, wenn von den vier Flächen eines Achtundvierzig-Flächners, die über jeder Granatoederfläche liegen, die zwei gegenüberſtehenden wegfallen, und zwar ſo, daß ſowohl an den vier- und vierkantigen Ecken des Achtundvierzig-Flächners als an den drei- und dreikantigen die abwechſelnden Flächen fortfallen.

Ecken dieſes Fünfecks iſt die eine der Ort der Würfelfläche, die zweite der Ort der Octaederfläche, und die drei andern Ecken, die über den weggefallenen Flächen liegen, ſind die Orte von $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ *). In Fig. 42. b. ſind dieſe fünf Flächenorte mit (1), (2), (3) u. ſ. w. bezeichnet; und es ſoll ihre Lage auf der Fläche $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a|$, deren Ort in 0 iſt, beſtimmt werden. In den im §. 45. gegebenen Ausdrücken für α und β wird $a = b = c = 1$, und $\mu = 3$, $\nu = 1$, $\pi = 5$, ſo daß wir haben

$$\alpha = \frac{5(2p - 3m - n)}{3m + n + 5p} \sqrt{\tfrac{1}{10}}$$

$$\beta = \frac{m - 3n}{3m + n + 5p} \sqrt{\tfrac{35}{10}}.$$

Für die Beſtimmung des Flächenorts (1) iſt $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$, des Flächenorts (2) $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$ u. ſ. w.

(1), $m = 0$, $n = 0$, $p = 1$, $\alpha = 2\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = 0$
(2), $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$, $\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = -\frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{35}{10}}$
(3), $m = 1$, $n = 1$, $p = 1$, $\alpha = -\frac{10}{9}\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = -\frac{2}{9}\sqrt{\tfrac{35}{10}}$
(4), $m = 3$, $n = 1$, $p = 2$, $\alpha = -\frac{6}{4}\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = 0$
(5), $m = 2$, $n = -1$, $p = 3$, $\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = \frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{35}{10}}$.

Man mache alſo in Fig. 42. b. $0(1) = 2$, $0(4) = \frac{6}{4}$, und $00' = \frac{1}{4}$, $0'(2) = 0'(5) = \frac{1}{4}\sqrt{35}$, ſo ſind die Orte (1), (2),

*) Es iſt eine ſehr intereſſante Eigenſchaft, ſowohl der Granatdioedriſchen als der Pyritoedriſchen Geſtalten, daß immer zwei derſelben in dem Verhältniß ſtehen, daß ſie ſich gegenſeitig fordern, daß bei der einen die Ecken in den Flächenorten des andern liegen, und Flächenorte in den Ecken der andern, nnd umgekehrt. In dieſem Verhältniß bei den Granatdioedriſchen Geſtalten ſtehen die zwei gewöhnlichſten Achtundvierzig-Flächner $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ und $|a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a|$. Allgemein ſind die Ausdrücke dieſer zwei zuſammengehörigen Achtundvierzig-Flächner: $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a\right|$ und, wenn $m \angle n \angle p$,

$$\left|\frac{1}{n-p}a : \frac{1}{n+p}a : \frac{m-n}{(m-n)(n+p) + 2mp(n-p)}a\right|.$$

(4) und (5) auf der Fläche $\overline{|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a|}$ conſtruirt, und für die Beſtimmung von (3) iſt $00'' = \frac{10}{9}$ und $0''3 = \frac{2}{9}\sqrt{35}$. So iſt das verlangte Fünfeck entworfen. Man erkennt ſogleich eine daſſelbe ſehr auszeichnende Eigenſchaft, daß nämlich (1) (2) (4) (5) eine Raute iſt, deren Diagonalen ſich verhalten wie $\sqrt{7} : \sqrt{5}$. Für die Kantenlängen, für die Neigungsverhältniſſe in den Kantenwinkeln, für die Neigungsverhältniſſe der ebenen Winkel dieſes Granatdioeders ſind in dieſer Conſtruction des Fünfecks alle erforderliche Data gegeben.

Anhang.

Die Stellung und Umkehrung der Methode.

§. 49.

Das Verhältniß der Invertirung, worauf Hauy bei den Gliedern der Hauptreihe im Syſteme des Kalkſpaths aufmerkſam machte, und das darin beſteht, daß zwei Körper die Neigungsverhältniſſe in den Kanten und in den ebenen Winkeln mit einander vertauſchen, ſo daß bei dem einen Körper dieſelben Neigungsverhältniſſe in den Kanten, wie bei dem andern in den ebenen Winkeln, und umgekehrt *) ſtatt finden, — kann aus einem viel allgemeinern Geſichtspunkte betrachtet werden. Im Kalkſpathſyſtem ſtehen in dieſem Verhältniß das Grundrhomboeder und das erſte ſchärfere Rhomboeder, das erſte ſtumpfere und das zweite ſchärfere, das zweite ſtumpfere und das dritte ſchärfere u. ſ. w.; das Geſetz iſt hier leicht zu erkennen, von dem Rhomboeder $\overline{\underline{|2s : s : 2s|}}^{\,(-2)^n c}$ würde $\overline{\underline{|s : \frac{1}{2}s : s|}}^{\,\frac{1}{(-2)^n} c}$ das invertirte Rhomboeder ſein. — Es iſt hier nicht der Ort, dieſes Verhält-

---

*) Strenger genommen ſind für beiderlei Winkel dieſelben, aber in Rückſicht ihrer Vorzeichen die entgegengeſetzten Verhältniſſe, d. h. beiderlei Winkel ergänzen ſich zu 180°.

Digitized by Google

niß überhaupt näher zu entwickeln, und in allen ſeinen Beziehungen zu verfolgen; es genügt uns hier, darauf aufmerkſam zu machen, wie dieſes Verhältniß kein anderes ſei, als das der Zonenebenen und der Kryſtallflächen. Die Ebenen der Kantenzonen des Grundrhomboeders ſind identiſch mit dem erſten ſchärfern Rhomboeder, und die Ebenen der Kantenzonen des erſten ſchärfern Rhomboeders ſind identiſch mit dem Grundrhomboeder. Daſſelbe findet bei allen in dieſem Verhältniß der Invertirung ſtehenden Gliedern ſtatt, und zwar eben ſowohl bei octaedriſchen Geſtalten als bei rhomboedriſchen und dihexaedriſchen. Bei zwei invertirten Geſtalten ſind die Zonenebenen der einen die Flächen der andern, und die Flächen der erſten die Zonenebenen der andern; die Zonenrichtungen, Kantenrichtungen der erſten ſind die Flächenrichtungen der andern, und die Flächenrichtungen ſind die Zonenrichtungen der andern, und umgekehrt. Wir wiſſen, daß die Zonenebenen und die Flächenrichtungen in einem Syſteme dieſelbe Beziehung zu dem Verhältniß in den drei Dimenſionen $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ haben, als die Kryſtallflächen nnd Zonenrichtungen zu a : b : c; — denken wir uns demnach zwei Kryſtallſyſteme, wo in dem einen $a : b : c = \sqrt{m} : \sqrt{n} : \sqrt{p}$, und in dem andern $a : b : c = \sqrt{\frac{1}{m}} : \sqrt{\frac{1}{n}} : \sqrt{\frac{1}{p}}$ iſt, ſo werden dieſe zweierlei Kryſtallſyſteme in dem Verhältniß der Invertirung ſtehen. Dies Verhältniß in dieſer ſeiner Allgemeinheit genommen, abgeſehen von ſeiner naturhiſtoriſchen Bedeutung, iſt nicht ohne bedeutendes ſpeculatives Intereſſe; beide Syſteme ſtehen ſich direct entgegen, es findet bei ihnen eine Umkehrung aller Verhältniſſe ſtatt, die ſich am ſchärfſten in der Umkehrung der Verhältniſſe der Grunddimenſionen ausſpricht, — was bei dem einen gleichſam nach Innen gewandt iſt (die Zonenebenen und die Flächenrichtungen), iſt bei dem andern gleichſam nach Außen gewandt (Kryſtallflächen und Zonenrichtungen).

Digitized by Google

Dieſe Umkehrung, Invertirung, — wie ſie bei der Gleichheit der Dimenſionen (wie im ſphäroedriſchen- und im Kalkſpathſyſteme) ſich in demſelben Syſteme ausſpricht, und hier gleichſam beide in dem Verhältniß der Invertirung ſtehende Syſteme noch in einem und demſelben Syſteme enthalten ſind, — tritt um ſo ſchärfer und trennender auf, je größer die Entfernung des Verhältniſſes der Dimenſionen von der Gleichheit derſelben iſt. —

§. 50.

Die im vorigen §. gemachte Bemerkung dient uns einmal, das Verhältniß der in dem Obigen gegebenen Behandlung der kryſtallonomiſchen Verhältniſſe zu der herrſchenden näher anzugeben, und dann zu zeigen, wie auch für dieſe, bis jetzt im Gebrauch ſtehende Betrachtungsweiſe, unſer Princip der graphiſchen Darſtellung ſeine Anwendung erlaubt. In unſeren Schematen wurden die Durchſchnittspunkte der Flächenrichtungen, d. i. die Projectionen der Flächenorte, angegeben, und ihre Verbindungslinien untereinander waren die Durchſchnitte der Zonenebenen; — die Flächenrichtungen und Zonenebenen waren die alleinigen Gegenſtände unſerer Betrachtung, von ihnen gingen unmittelbar alle unſere Fragen aus, und an ſie ſchloſſen ſich uns alle kryſtallonomiſche Geſetzlichkeiten an. Zonenebenen und Flächenrichtungen ſind uns dasjenige, was der herrſchenden Behandlungsweiſe kryſtallonomiſcher Verhältniſſe Zonenrichtungen und Kryſtallflächen ſind. — So kann unſere Behandlungsweiſe des Gegenſtandes gleichſam die invertirte von der üblichen genannt werden, iſt im eigentlichſten Sinne ihr Gegenſtück.

Um das Princip der graphiſchen Darſtellung auf die Behandlungsweiſe, der die Betrachtung der Kryſtallflächen und der Zonenrichtungen zu Grunde liegt, anzuwenden, bedarf es nur, daß, wie in unſerer die Projection der Flächenorte entworfen wurde, hier die Projection der Orte der Zonenebenen entworfen werde. Unſer Schema können wir uns auf eine indirecte Weiſe als entſtanden denken, indem durch den Mittelpunkt des Sy-

Digitized by Google

ſtems die Zonenebenen gelegt wurden, und dieſe die gerade Endfläche oder eine andere, auf der die Projection entworfen wurde, in geraden Linien ſchnitten, deren gegenſeitige Durchſchnittspunkte die Flächenorte waren. Wenn auf dieſelbe Weiſe die Kryſtallflächen des Syſtems durch den Mittelpunkt deſſelben gelegt werden, ſo werden dieſe die gerade Endfläche oder irgend eine andere gleichfalls in geraden Linien ſchneiden, und deren Durchſchnittspunkte untereinander werden die Orte der Zonenebenen ſein. Wir nennen hier dieſe Durchſchnittslinien Flächenlinien, wie vorhin die analogen Zonenlinien genannt wurden. — Es iſt leicht zu überſehen, wie hier in dieſer Darſtellung der kryſtallonomiſchen Verhältniſſe daſſelbe nur umgekehrt ſtatt findet, wie in der frühern. Was zuerſt den Zuſammenhang der verſchiedenen Flächen nach ihren Zonen betrifft, ſo gilt hier, daß alle Flächen in derſelben Zone liegen, deren Flächenlinien durch denſelben Zonenort gehen, und daß eine Fläche alle die Zonenrichtungen in ſich vereint, durch deren Zonenorte ihre Flächenlinie geht. Was ferner die ebenen Winkel der Kryſtallflächen betrifft, ſo ſind ihre Verhältniſſe auf dieſelbe Weiſe in den Flächenlinien dargeſtellt, wie oben die Neigungsverhältniſſe in den Zonen in den Zonenlinien dargeſtellt waren; und was endlich die Kantenwinkel hier betrifft, ſo gilt für ihre Neigungsverhältniſſe daſſelbe, was oben in Bezug auf die Neigungsverhältniſſe der ebenen Winkel auseinander geſetzt iſt. —

Digitized by Google

Ueber

den eigenthümlichen Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen Kryſtallſyſteme.

Digitized by Google

Digitized by Google

Die zwei- und eingliedrigen und die ein- und eingliedrigen Kryſtallſyſteme haben am längſten dem klaren Verſtändniß widerſtanden; durch die Arbeiten des Herrn Prof. Weiß iſt es uns erſt geworden. Eine hier folgende Reihe von Abhandlungen hat zum Zweck, mehrere für die Kryſtallonomie wichtige und für die Erhaltung eines unbefangenen Urtheils nothwendige Betrachtungen über die Syſteme dieſer Abtheilungen herauszuheben; und an ſie wird ſich eine Betrachtung anſchließen über die numeriſchen Grundverhältniſſe des Feldſpathſyſtems, weil deſſen Grundbeſtimmungen in den Dimenſionen ſich einer Sicherheit erfreuen, wie kein anderes Syſtem. Ehe wir unſere Betrachtung über die einzelnen für die Kryſtallkunde gewonnenen Syſteme dieſer Abtheilungen, und insbeſondere der Abtheilung der zwei- und eingliedrigen Syſteme beginnen, iſt es nothwendig, uns auf eine klare Weiſe über den Entwickelungsgang der Syſteme dieſer Abtheilung zu verſtändigen, um ſo nothwendiger, da in der neueſten Zeit von einem ſehr geehrten Mineralogen die Eigenthümlichkeit dieſes Entwickelungsganges überſehen iſt, und ſo, was durch eine tiefere Forſchung für die Wiſſenſchaft gewonnen war, durch ihn vielleicht wieder verwirrt werden könnte.

Auch hier wählen wir das Feldſpathſyſtem, deſſen Studium zuerſt das Licht des klareren Verſtändniſſes über die zwei- und eingliedrigen Syſteme brachte, und das in Beziehung auf den Zuſammenhang ſeiner Glieder die ſicherſte Bürgſchaft leiſtet, zum Ausgangspunkt. Aus den Abhandlungen des Herrn Prof. Weiß in den Schriften der Königl. Acad. der Wiſſenſchaften in Berlin müſſen wir als Reſultat der dortigen Unterſuchungen und Beobachtungen auszugsweiſe dieſen Zuſammenhang hier wiederholen, um dem Leſer Zuſammengehöriges nicht zu trennen.

Digitized by Google

Wir gehen aus von einer geſchobenen vierſeitigen Säule, mit einer ſchiefen, auf der vordern Säulenkante gerade aufgeſetzten Endfläche, von einer zwei- und einflächigen Säule, als von der erſten räumlichen Erſcheinung der Thätigkeiten in den drei rechtwinkligen Dimenſionen des Syſtems; dieſe Säule iſt für den räumlichen Ausdruck der Thätigkeiten das Frühere, in Beziehung auf die übrigen Glieder; über ihr und allen übrigen Gliedern ſteht das Verhältniß der Thätigkeiten in den Dimenſionen:

$$a : b : c = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{1} : \sqrt{\tfrac{1}{13}}.$$

Der zwiſchen den beiden Seiten der Richtung c eingetretene Unterſchied, der ein Vorne und ein Hinten einſetzt, iſt das Beſtimmende dieſer Abtheilung. Für den Zuſammenhang der ſich entwickelnden Glieder iſt die Beſtimmung des Verhältniſſes der vordern und der hintern Seite die Fundamentalbeſtimmung; in dieſem Verhältniß beruhen die Stufen eigenthümlicher Entwickelungen in der zwei- und eingliedrigen Abtheilung. — Beim Feldſpath haben die Beobachtungen an den Carlsbader Zwillingsverwachſungen es über allen Zweifel erhoben, daß die vordere und hintere Fläche noch in dem Verhältniß mathematiſcher Gleichheit ſtehen, bei ſehr beſtimmtem Hervortreten ihres phyſikaliſchen Unterſchiedes. Durch dieſes Factum der mathematiſchen Gleichheit ſind wir im Stande, durch die bloße Beobachtung der, bei weiterer Entwickelung ſich einſetzenden Zonen, die übrigen Glieder zu beſtimmen. Die Anſicht des Schema Fig. 43. a. *) wird den Zuſammenhang der Glieder durch die Zonen

*) In Fig. 43. b. iſt die Darſtellung des Zuſammenhanges der gegenſeitigen Verhältniſſe der verſchiedenen Glieder des Kryſtalliſationsſyſtems des Feldſpathes, durch die Projection der Flächenorte, der äußern Anſchauung und Betrachtung mehr genähert, indem dieſe Darſtellung mit einer perſpectiviſchen Projection der Flächen und ihrer Geſtalten verbunden iſt. Ich glaubte dem, der noch nicht ganz mit der Methode vertraut iſt, hierdurch keine unweſentliche Hülfe zur beſſern Verſtändigung zu leiſten. Die Sache ſelbſt wird wohl durch die Zeichnung

Digitized by Google

leicht überſehen laſſen. An die Stelle der Endkantenzonen der Octaeder der zwei- und zweigliedrigen und der viergliedrigen Syſteme, oder der Rhomboeder und Dihexader der drei- und ſechsgliedrigen Syſteme treten hier der Bedeutung und Wichtigkeit nach die Endkantenzonen des Zwei- und Einflächners; ſie ſind gepaart, rechts und links. So iſt das erſte ſich einſetzende Glied aus dieſer Zone dasjenige, welches zugleich in die Diagonalzone der hintern ſchiefen Endfläche gehört, die gleiche Neigung mit der vordern gegen die Axe hat, die Rhomboidfläche $\left|a : \frac{1}{2}b : c\right|$, deren Ort auf dem Schema 1(2). Dieſe Rhomboidflächen rufen ein neues Paar von Endkantenzonen hervor, in denen die Glieder —3 und 1(4) liegen, jenes zugleich in die vertikale Zone fallend, die hintere, untere ſchiefe Endfläche $\left|-\frac{1}{3}a : c : \infty b\right|$, dieſe in die Diagonalzone der vordern ſchiefen Endfläche gehörend, die Diagonalflächen $\left|a : \frac{1}{4}b : c\right|$. Durch die Diagonalflächen wird das dritte Paar Endkantenzonen beſtimmt, wodurch in der Diagonalzone von der hintern ſchiefen Endfläche das Glied $\left|-a : \frac{1}{6}b : c\right|$, und in der Diagonalzone der hintern untern ſchiefen Endfläche das Glied $\left|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{8}b : c\right|$ beſtimmt wird. Zugleich in die vertikale Zone fallend und in jede dieſer zwei Endkantenzonen gehörend, iſt das Glied $\left|\frac{1}{5}a : c : \infty b\right|$. Durch die zweiten Kantenzonen wird die Sphäre der erſten Kantenzonen erweitert, und die dritten geben beiden einen größern Wirkungskreis, wo ſie thätig einwirken können. So ſetzt der Conflikt der Diagonalzone der hintern untern ſchiefen Endfläche, (die von dem zweiten Paare Endkantenzonen beſtimmt wurde),

---

hinlänglich klar, und bedarf keiner weitern Erörterung, wenn man bedenkt, daß die Kante irgend zweier Flächen ſenkrecht ſteht auf der Zonenlinie, die die Orte beider Flächen verbindet, und man alſo zu der Geſtalt einer Fläche in dieſer Zeichnung gelangt, indem man nach den ſie umgebenden Flächenorten Linien zieht, und auf dieſen ſenkrechte Linien errichtet, deren Begrenzung unter einander die verlangte Geſtalt der Fläche in dieſer Art Zeichnungen beſtimmt.

Digitized by Google

mit dem erſten Paare Endkantenzonen die Fläche $|-\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}b : c|$ ein, und der Conflikt des erſten Paares mit dem dritten Paare die Fläche $|\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}b : c|$. Das vom dritten Paare hervorgerufene Glied $|\tfrac{1}{5}a : c : \infty b|$ beſtimmt durch ſeine Diagonalzone in dem zweiten Paare das Glied $|\tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{8}b : c|$. Endlich tritt ein viertes Paar von Endkantenzonen auf, beſtimmt durch $|-\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{8}b : c|$, wodurch in der Diagonalzone der vordern ſchiefen Endfläche das Glied $|a : \tfrac{1}{12}b : c|$, die untere Diagonalfläche, beſtimmt wird.

Wenige von den bis jetzt beobachteten Gliedern bleiben nur noch, die in dieſer Abtheilung von Zonen, in den Endkantenzonen des Zwei- und Einflächners, nicht ihre Beſtimmung haben, und dieſe finden ſie darin, daß eine zweite Säule ein analoges Hendyoeder bildet, und analoge Endkantenzonen entwickelt. Nämlich ein Zonenpaar zwiſchen der Rhomboidfläche rechts und der Diagonalfläche links, und der Rhomboidfläche links und der Diagonalfläche rechts führt in der horizontalen Zone auf die Flächen der zweiten Säule $|a : \tfrac{1}{3}b : \infty c|$, und das genannte Zonenpaar ſind Endkantenzonen dieſer zweiten Säule, welche die obere hintere ſchiefe Endfläche $|-3a : c : \infty b|$ beſtimmen. Daſſelbe Zonenpaar beſtimmt im Conflikt mit dem erſten Paare von Endkantenzonen der erſten Säule die Fläche $|b : c : \infty a|$.

Ein zweites Paar Endkantenzonen der zweiten Säule von $|-a : \tfrac{1}{2}b : c|$ über $|-\tfrac{1}{3}a : -\tfrac{1}{4}b : c|$ und von $|-a : -\tfrac{1}{2}b : c|$ über $|-\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}b : c|$ beſtimmt die Fläche $|-\tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{3}c : \infty b|$.

Ueberſehen wir die nach ihrem Zuſammenhange deducirten Glieder noch einmal, und fügen die gerade Abſtumpfung der Seitenkanten des Hendyoeders hinzu, ſo ſind es folgende:

$|a : b : \infty c|$	T	$|a : \tfrac{1}{3}b : \infty c|$	z	$|a : \infty b : \infty c|$	k
$|\infty a : b : \infty c|$	M	$|a : c : \infty b|$	P	$|-a : c : \infty b|$	x

$\lvert -a : \frac{1}{2}b : c \rvert$	o	$\lvert a : \frac{1}{4}b : c \rvert$	n	$\lvert -a : \frac{1}{6}b : c \rvert$	s
$\lvert a : \frac{1}{12}b : c \rvert$	i	$\lvert -a : \frac{1}{3}c : \infty b \rvert$	q	$\lvert -\frac{1}{5}a : \frac{1}{3}c : \infty b \rvert$	r
$\lvert -\frac{1}{3}a : c : \infty b \rvert$	y	$\lvert -\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c \rvert$	u	$\lvert -\frac{1}{3}a : \frac{1}{8}b : c \rvert$	v
$\lvert \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c \rvert$	m	$\lvert \frac{1}{5}a : \infty b : c \rvert$	t	$\lvert \frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b : c \rvert$	d
$\lvert \infty a : b : c \rvert$	g.				

Die Wichtigkeit dieſer Endkantenzonen und ihre bedeutungsvolle Rolle, die ſie in dem Entwickelungsgange der zwei- und eingliedrigen Syſteme haben, muß um ſo mehr hervorgehoben werden, da ſie die Eigenthümlichkeit der Entwickelung dieſer Syſteme im Gegenſatz gegen die zwei- und zweigliedrigen Syſteme bezeichnen, und wir können nicht umhin, hier der Arbeit des Profeſſor Mohs in Freiberg zu gedenken, da das, was in der zweiten Auflage ſeiner Characteriſtik des naturhiſtoriſchen Mineralſyſtems von der Entwickelung der zwei- und eingliedrigen Syſteme geſagt iſt, offenbar auf der irrigen Meinung beruht, als trete hier bloß das Verſchwinden der Hälfte gleichartiger Flächen von einem zwei- und zweigliedrigen Syſteme ein, zu vergleichen der Weiſe, wie im regulären Syſteme die tetraedriſche und pyritoedriſche Abtheilung entſteht, und trete nicht zugleich mit der Verſchiedenheit von Vorne und Hinten im ganzen Gange der Ausbildung eine ganz beſtimmte Eigenthümlichkeit auf.

Da wir das dem Herrn Profeſſor Mohs Eigenthümliche in Sache und Zeichen in der erwähnten Arbeit in unſerer Sprache kurz wiederzugeben vermögen, ſo thun wir es, um das Geſagte aus dem Zuſammenhang der Mohs'ſchen Darſtellung zu erweiſen *). Es werden in den dreigliedrigen und viergliedrigen

*) Um dem Vorwurf zu begegnen, daß wir einſeitig aus dieſer Arbeit des Prof. Mohs hervorheben, und uns darüber ein Urtheil erlauben, was der Verfaſſer wohl nicht für das Weſentliche derſelben will gelten laſſen, nämlich ſeine Bezeichnungsmethode und die derſelben zu Grunde liegenden Vorſtellungen, und das nicht erwähnen,

Syſtemen unterſchieden die Glieder der Hauptreihe, die Glieder aus den Endkantenzonen dieſer Hauptreihe, und die geraden Abſtumpfungen der Endkante derſelben. 1) Da der allgemeine Ausdruck des nten Gliedes der Hauptreihe in den viergliedrigen Syſtemen iſt:

$$\boxed{a : a : 2^{\pm\frac{n}{2}} c} \quad \text{oder} \quad \boxed{s : s : 2^{\pm\frac{n}{2}} c},$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl, d. h. je nachdem

---

worin doch offenbar das vorzüglichſte Verdienſt der Arbeit muß geſucht werden, und wovon der Verfaſſer ſagt: „daß dadurch möglich geworden ſei, mit einem Worte eine faſt gränzenloſe Mannigfaltigkeit von Geſtalten auszudrücken“ u. ſ. w., und wofür er als Beweis der Richtigkeit erwähnt, die Uebereinſtimmung mit Dr. Brewſter's merkwürdigen optiſchen Unterſuchungen, welche dieſer berühmte Naturforſcher in den Schriften der Wernerſchen Geſellſchaft in Edinburg nachgewieſen hat (S. Gilb. An. 9. H. 1821.), — damit man uns nicht vorwerfe, wir ignorirten abſichtlich dieſes weſentliche Reſultat der Kryſtallographie des Prof. Mohs, ſo können wir nicht umhin, unſere Verwunderung darüber auszuſprechen, daß das, was ſchon ſeit Jahren offenkundig in der Diſſertation des Prof. Weiß, De indagando etc. und in den Schriften der Berliner Academie da liegt, die natürlichen Abtheilungen der Kryſtallſyſteme, als Reſultat von Unterſuchungen, die der Kryſtallographie eine bedeutungsvolle Stelle in der Reihe der Naturwiſſenſchaften gewonnen haben, Unterſuchungen und Reſultate, die dem Herrn Prof. Mohs nicht unbekannt ſein konnten, und nicht unbekannt ſein durften — daß er das als ſeine Entdeckung aufſtellt. — Obgleich ich wohl weiß, daß Vieles, wenn ſeine Zeit gekommen iſt, von Verſchiedenen und an verſchiedenen Orten gefunden und erkannt wird, zu gleicher Zeit und ohne Mittheilung, — ſo zwingt mich doch das Ignoriren der Arbeiten des Prof. W. von Seiten des Prof. M., auch da noch, als Gelehrte außerhalb, weniger bekannt mit dem, was von deutſchen Gelehrten in der Wiſſenſchaft gefördert iſt, ihm das Verdienſt zuſchreiben, ja das ſelbſteigene Anerkennen des Zeugniſſes fremder Gelehrten, — an eine Abſichtlichkeit des Prof. M. hierbei zu glauben, und dies beſtimmte Urtheil auszuſprechen, — und muß mich rechtfertigen bei denen, die glauben möchten, daß mir noch kein Recht zuſtände, über einen Mann in der Art zu ſprechen, deſſen wohlerworbene Verdienſte in vielen Beziehungen anerkannt und hochgeſchätzt ſind.

Digitized by Google

das Octaeder erſter oder zweiter Ordnung iſt, und das nte Glied alſo durch eine bloße Vervielfachung von c unterſchieden iſt, nämlich $2^{\pm\frac{n}{2}}c$, ſo bezeichnet Herr Prof. M. dieſes Glied durch ($P \pm n$).

Ebenſo iſt der Ausdruck des nten Gliedes der Hauptreihe in den dreigliedrigen Syſtemen

$$\boxed{a : a \quad (-2)^{\pm n} c}$$

wonach, je nachdem der Coefficient von c eine poſitive oder negative Vervielfachung iſt, das bezeichnete Rhomboeder zur erſten oder zweiten Ordnung gehört; und daher iſt das Mohs'ſche Zeichen $R \pm n$.

2) Die Glieder aus den Endkantenzonen dieſer Hauptreihe werden dadurch bezeichnet, daß angegeben wird die Vervielfachung des Coſinus bei gleichem Sinus für ihre Neigung in dieſer Endkantenzone, in Vergleich mit den Flächen des Gliedes, aus deſſen Endkantenzone das zu bezeichnende Glied iſt, und dieſe Vervielfachung wird in der Form eines Exponenten über das Zeichen des Gliedes der Hauptreihe geſetzt, ſo daß $(P \pm n)^m$ das Glied bezeichnet, das aus der Endkantenzone von $P \pm n$ einen mfachen Coſinus bei gleichem Sinus in Vergleich mit $P \pm n$ für die Neigung in der Endkantenzone von $P \pm n$ hat; — es ſind Vier- und Vierkantner, wie durch $(R \pm n)^m$ auf dieſelbe Weiſe die Drei- und Dreikantner bezeichnet werden. Daher

$$(P \pm n)^m = \boxed{a : ma : m2^{\pm\frac{n}{2}}c}$$

oder $= \boxed{s : ms : m2^{\pm\frac{n}{2}}c}$, je nachdem der Vier- u. Vierktr. a. d. Kantz. eines Octaeders 1ſter oder 2ter Ordnung iſt

$$(R \pm n)^m = \boxed{\frac{1}{3m-1}s : \frac{1}{3m+1}s \quad \tfrac{1}{4}(-2)^{\pm n}c}.$$

Digitized by Google

3) Die geraden Abſtumpfungen der Endkanten der Vier- und Vierkantner in dem einen Falle, der Drei- und Dreikantner im andern, jene zweierlei Octaeder erzeugend, dieſe zweierlei Rhomboeder; letztere ſind:

$$\left[\begin{matrix}\frac{3m+1}{4}(-2)^{\pm n}c\\ s \;:\; 2s\end{matrix}\right] \text{ und } \left[\begin{matrix}\frac{3m-1}{4}(-2)^{\pm n}c\\ s \;:\; 2s\end{matrix}\right],$$

denen die Zeichen $\frac{3m+1}{4}R\pm n$ und $\frac{3m-1}{4}R\pm n$ entſprechen, wie den analogen Ausdrücken der auf dieſe Weiſe entſtehenden Octaeder die Zeichen $\frac{m+1}{2}P\pm n$ und $\frac{m}{\sqrt{2}}P\pm n$ entſprechen.

Außerdem wird in der dreigliedrigen Abtheilung noch das Glied ausgezeichnet, das, aus der Terminalkantenzone, die Mitte bildet zwiſchen der erſten und zweiten Unterabtheilung, das Glied, wo in den zweierlei Endkanten des Drei- und Dreikantners gleiche Neigung ſtatt findet:

$$\left[\begin{matrix}\tfrac{2}{3}(-2)^{\pm n}c\\ s \;:\; s\end{matrix}\right] = P\pm n.$$

Das ſechsgliedrige Syſtem betrachtet Hr. Prof. M. überall als ein dirhomboedriſches, wie dies Hr. Prof W. früher in ſeiner Diſſertation De Ind. form. cryst. auch that *).

Wir

*) Es war ein weſentlicher Vorwurf der Hauyſchen Bezeichnungsart, nicht, daß ſie alle ſich entwickelnden Glieder auf die Kanten und Ecken überhaupt bezog, ſondern, daß ſie alle auf die Kanten und Ecken ein und derſelben Geſtalt, der Primitivform, bezog. Doch that ſie das auch nur bei ihrem erſten Erſcheinen, und ſpäter gab Hauy immer die Beziehungen einer Geſtalt auf die Kanten oder Ecken eines Gliedes, auf welches ſie die nächſte Beziehung hatte, an. Das war ein weſentlicher Fortſchritt. Hr. Prof. Mohs hat dieſes gleichfalls erkannt, und der weſentlichſte Unterſchied von der Hauyſchen Bezeichnungsart iſt, daß er nicht die Beſtimmung einer Geſtalt an einer Primitivform, ſondern an den verſchiedenen Gliedern der Hauptreihe giebt. — Wir müſſen aber fragen: iſt die *alleinige* Beziehung der abgeleiteten

Digitized by Google

Wir wenden uns jetzt zu den zwei- und zweigliedrigen Syſtemen, um das nachzuweiſen, was wir oben behaupteten, da die Glieder, deren hier als im Gange der Entwickelung ſich einſetzenden gedacht wird, zur Hälfte auch die in den zwei- und eingliedrigen Syſtemen auftretenden ſein ſollen. Die Hauptreihe beſteht aus zweierlei Octaedern, aus zwei- und zweikantigen und zwei- und zweiflächigen:

$$\boxed{a : b : 2^{\pm n} c} = P \pm n$$

$$\boxed{a : \infty b : 2^{\pm n} c} = \bar{Pr} \pm n$$

$$\boxed{\infty a : b : 2^{\pm n} c} = \breve{Pr} \pm n.$$

Die Glieder aus den Kantenzonen dieſer Hauptreihe werden wie vorher durch die Angabe der Vervielfachung der Kantennormale bei gleicher Eckenaxe bezeichnet, d. h. die Fläche wird gedacht durch die Lateralecke gelegt, und es wird angegeben das Viel-

Glieder *auf die Kanten* die naturgemäße? denn im Allgemeinen erkennen wir eine naturgemäße Beziehung auf die Kanten an. Sind die Beziehungen auf die Endkanten der Hauptreihe, der Reihe der Drei- und Dreikantner, oder Vier- und Vierkantner, und der Nebenreihen (die geraden Abſtumpfungen der Endkanten von jenen) die einzigen, die in der Natur gegründet ſind, oder fordert dieſe nicht auch andere? Wir werden ſehen, daß das m des Hrn. Prof. M. erſt durch die Anwendung des Zonengeſetzes, des oberſten Geſetzes aller Kryſtallentwickelung für die Erſcheinung, ſeine Bedeutung erhält, und daß durch das Zonengeſetz jedesmal wenigſtens zwei Werthe für m gefordert werden, daß die Geſtalt $(P + m)^m$ jedesmal wenigſtens zwei Beziehungen nothwendig erfordert, ſie alſo auch nothwendig wenigſtens zweierlei Zeichen haben müßte. Eine Willkühr wird aber auch, wenn man ſich der beiden Zeichen bediente, doch bleiben, weil viele andre Beziehungen, die die zu bezeichnende Fläche auf andere Stellen als die genannten Endkanten hat, und die nichts deſto weniger das Beſtimmende derſelben ſein können, gar nicht in das Zeichen aufgenommen ſind. Jede naturgemäße äußere Bezeichnung einer Fläche fordert eine große Mannigfaltigkeit, weil die Fläche in jeder Richtung mit den übrigen in Verbindung und Zuſammenhang ſteht.

Digitized by Google

fache der Normale der Kante (aus deren Zone ſie iſt), das von ihr abgeſchnitten wird. Die Glieder aus den Kantenzonen der zwei- und zweikantigen Octaeder zerfallen in zwei Abtheilungen, je nachdem ſie aus der Zone der ſtumpfen oder ſcharfen Endkante ſind:

$$\boxed{ma : b : m2^{\pm n} c} = (\breve{P} \pm n)^m$$

$$\boxed{a : mb : m2^{\pm n} c} = (\bar{P} \pm n)^m \, .$$

Die Glieder aus den Kantenzonen der zwei- und zweiflächigen Octaeder theilen ſich wiederum, je nachdem ſie über die Abſtumpfung der ſcharfen oder ſtumpfen Endkante des ihnen zugehörigen zwei- und zweikantigen Octaeders liegen:

$$\boxed{\frac{2}{m+1} a : \frac{2}{m-1} b : 2^{\pm n} c} = (P\bar{r} \pm n)^m$$

$$\boxed{\frac{2}{m-1} a : \frac{2}{m+1} b : 2^{\pm n} c} = (P\breve{r} \pm n)^m .$$

Endlich werden Glieder aus den Terminalkantenzonen der ebengenannten Octaeder und der Lateralkantenzone des Grundoctaeders unterſchieden:

$$\boxed{a : b : \frac{m+1}{2} 2^{\pm n} c} = \frac{m+1}{2} P \pm n.$$

Von den Werthen des m wird geſagt, die gewöhnlichſten durch die Beobachtung bis jetzt gegebenen ſeien, 3, 4, 5, doch ſeien dieſe nicht die einzigen in der Natur vorkommenden, und im Allgemeinen laſſe ſich von dem m nur ſagen, daß es eine rationale Zahl ſein müſſe. Ich weiß nicht, ob die Abſicht des Hrn. Prof. *Mohs* es nicht erforderte, die Bedeutung dieſer Werthe von m nachzuweiſen; hier für uns iſt es aber nothwendig, darauf einzugehen. Durch die angegebenen Werthe von m werden Glieder bezeichnet, die ihre Beſtimmung erhalten dadurch, daß Richtungen, die in verſchiedenen Gliedern der Hauptreihe *getrennt* ſind, in ihnen *vereinigt* werden, die beſtimmt

Digitized by Google

werden durch Zonen, die in den Gliedern der Hauptreihe aufgetreten ſind. Werden von irgend einem zwei- und zweikantigen Gliede der Hauptreihe die Flächen aus deſſen Kantenzone hervorgehoben, die zugleich in Kantenzonen von andern Gliedern der Hauptreihe liegen, ſo ſind dies folgende: 1) die Flächen, die zugleich in der Kantenzone des zugehörigen zwei- und zweiflächigen Octaeders von $\boxed{a:b:2^n c}$ liegen, ſind $\boxed{a:\frac{1}{2}b:2^n c}$ und $\boxed{\frac{1}{2}a:b:2^n c}$.

2) Die Flächen, die zugleich in der Kantenzone des erſten ſchärfern zwei- und zweikantigen Octaeders*) liegen, ſind mit den genannten identiſch; ſo daß dieſe Flächen $\boxed{a:\frac{1}{2}b:2^n c}$ und $\boxed{\frac{1}{2}a:b:2^n c}$ eine Beziehung auf dreierlei Endkanten von Gliedern der Hauptreihe haben, und daher in der Mohs'ſchen Bezeichnungsart dreierlei Zeichen erlauben, nämlich in Beziehung auf die Endkante von $\boxed{a:b:2^n c}$ $(\breve{P}+n)^2$, und $(\bar{P}+n)^2$ in Beziehung auf das zugehörige zwei- und zweiflächige Octaeder $(\breve{Pr}+n)^3$ und $(\bar{Pr}+n)^3$, und in Beziehung auf das erſte ſchärfere zwei- und zweikantige $[\breve{P}+(n+1)]^{\frac{1}{2}}$ und $[\bar{P}+(n+1)]^{\frac{1}{2}}$ **).

3) Die Flächen $\boxed{a:\frac{1}{3}b:2^n c}$ und $\boxed{\frac{1}{3}a:b:2^n c}$ aus den Kantenzonen von $\boxed{a:b:2^n c}$ ſind in ihnen dadurch beſtimmt,

---

*) Es werden hier, in den zwei- und zweigliedrigen Syſtemen, bekanntlich die Glieder in jeder der zwei Abtheilungen der Hauptreihe, der zwei- und zweiflächigen Abtheilung und der zwei- und zweikantigen Abtheilung für ſich gezählt, ſo daß z. B. das erſte ſchärfere zwei- und zweikantige Glied eigentlich das zweite ſchärfere Glied der Hauptreihe iſt, weil zwiſchen ihm und dem Grundkörper das erſte ſchärfere zwei- und zweiflächige Glied liegt.

**) Die allgemeine Beſtimmung für m, die Hr. Prof. Mohs giebt, daß es größer als 1 ſein müſſe, iſt offenbar der Natur völlig fremd, — und ſie ſowohl als z. B. die Nichtangabe des Werthes $m=2$ ſoll offenbar nur dienen, die Methode der Bezeichnung vor der Willkührlichkeit zu ſchützen, die nothwendig in ihr liegt.

Digitized by Google

daß ſie zugleich in den Kantenzonen vom erſten ſchärfern zwei- und zweiflächigen Octaeder liegen, und in den Kantenzonen vom zweiten ſchärfern zwei- und zweiflächigen; ihre Zeichen in Beziehung auf die Endkanten von $|a : b : 2^n c|$ ſind $(\breve{P}+n)^3$ und $(\bar{P}+n)^3$. (In Beziehung auf die zwei genannten zwei- und zweiflächigen Octaeder werden ihre Zeichen ſein $(P\breve{r}+n+1)^2$, $(\bar{P}r+n+1)^2$, und $(\breve{P}r+n+2)^{\frac{1}{2}}$ $(\bar{P}r+n+2)^{\frac{1}{2}}$.

4) Die Glieder aus der Kantenzone von $|a : b : 2^n c|$, die zugleich in die Kantenzonen vom zweiten ſchärfern zwei- und zweikantigen Octaeder fallen, ſind $|\frac{1}{4}a : b : 2^n c|$ und $|a : \frac{1}{4}b : 2^n c|$ deren Zeichen in Beziehung auf $|a : b : 2^n c|$ ſind

$$(\breve{P}+n)^4,\ (\bar{P}+n)^4.$$

5) Die Glieder aus dieſer Kantenzone, die zugleich in den Kantenzonen des zweiten ſchärfern zwei- und zweiflächigen Octaeders liegen, $|a : \frac{1}{5}b : 2^n c|$, $|\frac{1}{5}a : b : 2^n c|$ haben die Zeichen $(\breve{P}+n)^5$ und $(\bar{P}+n)^5$ u. ſ. w. So haben wir in dieſen deducirten Gliedern, deren Zeichen in Beziehung auf $(P+n)^1$ wären $(P+n)^2$, $(P+n)^3$, $(P+n)^4$, $(P+n)^5$, für m die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, und aus der Fig. 44. (wo durch die Linie ab und wb′ die betrachteten Endkantenzonen von $|a : b : 2^n c|$ vorgeſtellt ſind, und wo die dieſen Linien beigeſchriebenen Zahlen 1, 2, 3, u. ſ. w. die Werthe von m ſind, die den Flächen entſprechen, deren Orte durch die Zahlen bezeichnet ſind), wird man ſich leicht Rechenſchaft geben können, wie beim weitern Verfolg der Glieder, die in dieſer Kantenzone beſtimmt werden, theils durch die Kantenzonen der Hauptreihe, theils durch die Kantenzonen der auf dieſe Weiſe ſchon abgeleiteten Glieder, die Reihe der Werthe für m, wie die natürliche Zahlenreihe fortgeſetzt wird, ſo daß $(P+n)^6$, $(P+n)^7$ u. ſ. w. weiter in dieſer Kantenzone auftreten.

Digitized by Google

In derſelben Figur ſtellt a d die Kantenzone des nten zwei- und zweiflächigen Gliedes der Hauptreihe vor, und die Zahlen, die die auf eine ganz analoge Weiſe beſtimmten Flächenorte in dieſer Zonenlinie bezeichnen, ſind die Werthe von m, die den Flächen angehören, die den bezeichneten Orten entſprechen, ſo daß wir auch hier in dieſer Endkantenzone für die Glieder, die theils durch die Endkantenzonen der verſchiedenen Glieder der Hauptreihe, theils durch die Endkantenzonen der in dieſer Zone ſchon beſtimmten Glieder bedingt werden, haben $(Pr + n)^1$, $(Pr + n)^2$, $(Pr + n)^3$, $(Pr + n)^4$, $(Pr + n)^5$ u. ſ. w., gleichfalls die Reihe der natürlichen Zahlen.

Endlich die Nebenreihe der Octaeder aus der vertikalen Zone betreffend, ſehen wir, daß es diejenigen Glieder ſind, welche die Kanten abſtumpfen, die die Flächen $\boxed{\frac{1}{m} a : b : 2^n c}$ und $\boxed{a : \frac{1}{m} b : 2^n c}$ unter einander bilden (d. i. die Kante, welche Hr. Mohs die Combinationskante von $(\breve{P} + n)^m$ und $(\bar{P} + n)^m$ nennt); und für welche Glieder die der Zonenlinie c f beigeſchriebenen Zahlen die Vervielfachungen des Sinus bei gleichem Coſinus für ihre Neigungen in der Lateralkante anzeigen, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{7}{2}$ u. ſ. w.; dieſe Glieder wurden durch $\frac{m + 1}{2} P + n$ bezeichnet *).

---

*) Daß die Werthe von dem Mohsſchen m ſo unmittelbar von unſerm Schema abzuleſen ſind, wie die den Zonenlinien beigeſchriebenen Zahlen erweiſen, davon wird man ſich leicht überzeugen können. Die Hälfte des Theils der Kantenzonenlinie, welcher zwiſchen den Flächenorten des Octaeders eingeſchloſſen iſt, iſt das Maaß, womit die Entfernung eines Flächenortes von der Mitte der Zonenlinie gemeſſen wird, und dieſe Entfernung iſt der Werth von m, der der zu dem Flächenorte gehörigen Fläche entſpricht. Für die Glieder aus den Kantenzonen der zwei- und zweikantigen Octaeder und für die Glieder aus den vertikalen Zonen iſt dies ſchon für ſich klar, da die

Digitized by Google

Wir können nun keineswegeſ geneigt ſein, zu glauben, daß dieſe Reihen von Gliedern, die durch die natürliche Zahlenreihe

---

angegebene Länge der Zonenlinie der Einheit des Coſinus bei gleichem Sinus für die Neigung in dieſen Zonen entſpricht. In Betreff der Glieder aus den Kantenzonen eines zwei- und zweiflächigen Octaeders, aus der Zone der Kante der Flächen $\boxed{a : 2^n c : \infty b}$ und $\boxed{b : 2^n c : \infty a}$ dürfen wir nur bedenken, daß die Fläche, die zugleich in die Diagonalzone von $\boxed{-\frac{1}{m} b : 2^n c : \infty a}$ fällt, diejenige iſt, der bei gleicher Eckenaxe eine $(2m + 1)$fache Vervielfachung der Normale der Kante von $\boxed{b ; 2^n c : \infty a}$ und $\boxed{a : 2^n c : \infty b}$ entſpricht, und daß dem Orte dieſer Fläche auf dem Schema dieſelbe Entfernung $2m + 1$ von der Mitte der Zonenlinie zukömmt.

Hierdurch ſind wir im Stande, ſowohl unmittelbar die Mohs'ſchen Zeichen aus unſerm Schema abzuleſen, als auch für die in den Mohs'ſchen Zeichen gegebenen Flächen unmittelbar die Orte in unſerm Schema aufzuzeichnen. Es ſei z. B. die Fläche $(\breve{P} + n)^m$ gegeben, und es ſeien p, q, r, s die Flächenorte des nten zwei- und zweikantigen Gliedes der Hauptreihe (deren Orte durch die in- und umſchriebenen Rhomben und Rechtecke auf dem Schema beſtimmt werden, wie aus der Figur hinlänglich erhellt), ſo müſſen wir auf der Zonenlinie der ſtumpfen Endkante $a\iota = m.aq$ machen, damit ι der Flächenort von $(\breve{P} + n)^m$ ſei. Wäre das Zeichen $(\overline{P} + n)^m$, ſo müßte daſſelbe in Beziehung auf die Zonenlinie der ſcharfen Endkante geſchehen.

Iſt das Zeichen $(\overline{Pr} + n)^m$ gegeben, ſo iſt ι'', der Ort der bezeichneten Fläche, dadurch beſtimmt, daß die Länge $x\iota''$ der Kantenzonenlinie von $(\overline{Pr} + n)$ und $(\breve{Pr} + n)$ gleich $m.xv$ iſt, und zwar in ihrer Verlängerung über $(\overline{Pr} + n)$, wie auf der Verlängerung derſelben Zonenlinie über $(\breve{Pr} + n)$ die Länge $y\iota' = m.yu$ den Flächenort ι' für $(\breve{Pr} + n)^m$ beſtimmt.

Umgekehrt iſt für die Flächenorte im Schema leicht das Mohs'ſche Zeichen zu leſen. — Da durch jeden Punkt die vier verſchiedenen Zonenlinien können gezogen werden, ſo kann das Zeichen auch jedesmal eine vierfache Form haben, jedesmal kann die Fläche durch die 4 Formen $\left(\frac{1}{p} \overline{P} + n\right)^m \left(\frac{1}{p'} \breve{P} + n'\right)^{m'} \left(\frac{1}{p''} \overline{P} + n''\right)^{m''} \left(\frac{1}{p'''} \breve{Pr} + n'''\right)^{m'''}$ bezeichnet werden. Herr Prof. Mohs ſichert ſich zum Theil gegen die Willkühr in der Wahl eines dieſer vier verſchiedenen Zeichen dadurch,

beſtimmt werden, übereinſtimmen mit der Entwickelungsreihe des Syſtems, ſondern wir wiſſen ſehr wohl, daß das Ineinandergreifen der Beziehungen, wie deſſen Wiederſchein in den Zonen ſich offenbart, viel verwickelter, inniger und vielſeitiger iſt, aber das Reſultat können wir aus dieſer Betrachtung ziehen, daß alle, und namentlich die vom Hrn. Prof. Mohs ausgezeichneten Glieder, hervorgerufen und bedingt ſind durch die Hauptreihe der Octaeder. Ich ſage hervorgerufen und bedingt, denn in der Erſcheinung der Kryſtallgeſtalten offenbart ſich der Zuſammenhang der Glieder als das Produkt des Conflikts ſich kreuzender Richtungen; dieſe ſich kreuzenden Richtungen ſind früher, ſie ſind in dieſem Sinne der Grund des Gliedes, welches ſie in ſich aufnimmt, in ſich vereint; ihr Durchkreuzungspunkt iſt der Knoten, worin der neue Zweig wurzelt. Die Hauptreihe iſt das Beſtimmende, der Grund aller andern Glieder, der Stamm, an deſſen Knoten die andern Glieder wie Zweige ſich einſetzen, und zwar ſo, daß die Zweige wiederum Zweige treiben. — Bis zu dieſem Punkte glaubten wir die Darſtellung des Hrn. Mohs führen zu müſſen, (und wir denken dies ganz in ſeinem Sinne gethan zu haben), um von hier aus ſchließen zu können, wo alſo der Stamm fällt, fallen auch die Glieder, wenn es nicht etwa Schmarotzer ſind, die von der Fülle ſeines Inhalts wohl noch eine Zeitlang ihr Leben friſten.

Wo aber iſt in den Syſtemen der zwei- und eingliedrigen Abtheilung die Hauptreihe der Octaeder? Das Fehlen derſelben iſt der Grundzug der Eigenthümlichkeit der Entwickelung derſelben. Eine Deduction der Glieder aus dieſer Hauptreihe, und

daß er die Werthe von n, m und p nur in der von uns entwickelten Bedeutung nimmt, nur ſolche Werthe zugiebt, die aus dem Conflikt der Zonen der Hauptreihe und der von ihnen beſtimmten Glieder ſich ergeben, aber nur zum Theil, indem wir geſehen haben, bei der Deduction der Glieder aus der Endkante des zwei- und zweikantigen Octaeders, daß die Unbeſtimmtheit bei vielen Gliedern dadurch keinesweges gehoben iſt.

Digitized by Google

eine auf dieſe gegründete Bezeichnung derſelben iſt alſo das der Natur dieſer Abtheilungen fremdeſte, iſt eine Künſtlichkeit in der Methode, die dem Naturgemäßen am entfernteſten iſt.

Man entſchuldige dieſe Ausführlichkeit, wir hielten das Reſultat derſelben für wichtig, da gerade dieſe Abtheilung von Syſtemen, die länger in größerer Dunkelheit lag, wie die übrigen Abtheilungen, mit einer Klarheit und Sicherheit in dem Gange ihrer Entwickelung feſtgeſtellt iſt, daß wenig zu wünſchen übrig bleibt, und die Darſtellung des Hrn. Mohs, dieſes nicht erkennend, den eigenthümlichen Character dieſer Syſteme gänzlich zerſtörte.

Die Möglichkeit, jedes Glied in dieſer Bezeichnung des Hrn. Mohs zu beſtimmen, kann leicht ganz allgemein nachgewieſen werden *), und bei dem innern Reichthum von Beziehungen wird auch meiſt das Zeichen noch einfach genug werden; aber alles kömmt darauf an, ob die im Zeichen gegebene Beziehung der Fläche diejenige iſt, die in der Natur ihr entſpricht, ob der durch die Zeichen angegebene Zuſammenhang der in der Natur iſt. Wenn wir, um bei dem für dieſe Bezeichnungsart günſtigſten Falle ſtehen zu bleiben, bei dem, wo die vordere und hintere Fläche in dem Verhältniß mathematiſcher Gleichheit ſtehen, beim Feldſpathſyſtem, um die in ihm beobachteten Glieder in den Mohs'ſchen Zeichen anzugeben, uns ein Octaeder conſtruiren, indem wir die den Rhomboidflächen der hintern Seite entſprechenden vordern Flächen ſupponieren: ſo liegen die Flächen $\boxed{-a : \frac{1}{6}b : c}$ $\boxed{a : \frac{1}{4}b : c}$ und $\boxed{\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c}$ in den Kantenzonen dieſes Octaeders, und ihre Zeichen ſind — $(\breve{P})^2$, $(+\breve{P})^2$, $(\bar{P})^3$. Wenn aber die Deduction des Gliedes $(P)^3$ im zwei- und zweigliedrigen Syſteme erfordert, es anzuſehen als beſtimmt durch den Conflikt der Kantenzone des Grundoctaeders mit der Kantenzone des erſten oder zweiten ſchärfern zwei- und zweiflächigen Octaeders, ſo fragen wir hier billig, wodurch iſt

---

*) In der vorigen Note ſahen wir, daß ganz allgemein jeder Fläche vier verſchiedene Zeichen entſprechen.

Digitized by Google

dieſes Glied hier beſtimmt, wo die Glieder der Hauptreihe auf das Beſtimmteſte im Gange der Entwickelung ausgeſchloſſen ſind, und mit ihnen die Kantenzonen derſelben fortfallen? — offenbar durch Zonen, die einem zwei- und zweigliedrigen Syſteme in der Art, wie ſie hier erſcheinen, völlig fremde ſind; denn ſowohl die dritte Kantenzone unſers Zwei- und Einflächners, als die Zone nach der zweiten Säule über die hintere untere Fläche iſt im zwei- und zweigliedrigen Syſteme erſt möglich, nachdem mehrere Glieder der Hauptreihe aufgetreten ſind. Was von dieſen an das ſupponirte Octaeder zunächſt ſich anſchließenden Flächen gilt, gilt mit noch mehreren Gründen von den übrigen Flächen. Um z. B. den Zeichen der Flächen $\left|\frac{1}{5}a : c : \infty b\right|$ $\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b : c\right|$ $5.\overline{Pr}$, $(\overline{Pr})^9$ eine Bedeutung zu geben, müßte etwa erſt die Fläche $(\overline{P})^5$ ſupponirt werden, und für das Zeichen $(\overline{P})^5$ etwa das zweite ſchärfere zwei- und zweiflächige Octaeder der Hauptreihe, wodurch $(\overline{P})^5$ als das Glied mit 5fachem Coſinus bei gleichem Sinus aus der Kantenzone von P in dieſer Kantenzone beſtimmt würde. — Ueberhaupt ſind ja offenbar die Kantenzonenlinien bc, cd, ab, ad in Fig. 45., wodurch dieſe und die übrigen Flächen ihr einfachſtes Mohs'ſches Zeichen erhalten, nur in der innern Fülle der Beziehungen der Glieder in jeder Richtung gegründet, und bezeichnen nichts weniger als den Gang der Entwickelung.

Die Mohs'ſchen Zeichen für die übrigen Glieder ſind aus der Fig. 45. zu erſehen.

Wer vertraut iſt mit dem Gange kryſtalliniſcher Entwickelung, dem wird es durch das Geſagte hinlänglich klar ſein, wie wir uns auf das Beſtimmteſte gegen die Anſicht erklären müſſen, worin die Mohs'ſche Darſtellung und Bezeichnung der zwei- und eingliedrigen Syſteme beruht, daß ſie nur die Geſtalten der zwei- und zweigliedrigen Syſteme, deren Flächen zur Hälfte verſchwunden ſind, enthalten. Folgende Betrachtung wird aber auch dem, dem die kryſtalliniſchen Geſtaltungen in ihrem

Digitized by Google

innern Zuſammenhange minder klar in der Anſchauung liegen, weiter keine Wahl laſſen, ob dieſe vom Prof. Mohs ergriffene Analogie mit den zwei- und zweigliedrigen Syſtemen, erzwungen durch Suppoſitionen Schritt für Schritt von Gliedern, welche fehlen und im Gange der Entwickelung fehlen müſſen, in der Natur dieſer Abtheilungen gegründet iſt, oder ob ihr entſpricht die Eigenthümlichkeit des Zuſammenhanges, wie wir ihn oben durch die Kantenzonen des Hendyoeders ausgeſprochen haben, wo kein Glied ſupponirt wird, wo alles in ſo innigem Zuſammenhange ſteht, daß wir ſagen könnten, daß bis auf einen gewiſſen Punkt der Entwickelung kein zwiſchen liegendes Glied der Beobachtung entgangen iſt, daß wir mit Gewißheit den weitern Gang der Entwickelung vorconſtruiren könnten.

Nehmen wir die Betrachtung jener Kantenzonen noch einmal unter einer andern Form auf. Wir conſtruiren uns aus der vordern ſchiefen Endfläche und den hintern Rhomboidflächen eine zwei- und einflächige Pyramide, die ſich von einem Rhomboeder dadurch unterſcheidet, daß ſie nicht dreiflächige und dreikantige Endecken, ſondern zwei- und einflächige und zwei- und einkantige Endecken hat; die Endkanten ſind: eine zweiſeitige und zwei ein- und einſeitige, (die Seitenkanten müſſen in zwei zweiſeitige und vier einſeitige unterſchieden werden); die drei Enddiagonalen ſind auch zweierlei, eine zweiſeitige und zwei ein- und einſeitige Diagonalen.

Dieſe zwei- und einflächige Pyramide erleidet im Gange der Ausbildung des Feldſpathſyſtems eine Entwickelung, die ganz analog mit der Entwickelung eines Rhomboeders iſt. Es bildet ſich zuerſt eine Reihe von zwei- und einflächigen Pyramiden, die der Hauptreihe in den rhomboedriſchen Syſtemen entſpricht. Die erſte ſchärfere zwei- und einflächige Pyramide entſteht, indem durch je zwei Enddiagonalen Ebenen gelegt werden. Die Fläche $\left|-\frac{1}{3}a : c : \infty b\right|$ geht durch die zwei ein- und einſeitigen Enddiagonalen, die Diagonalflächen $\left|a : \frac{1}{4}b : c\right|$ gehen durch die zweiſeitige und durch die ein- und einſeitigen Diagonalen.

An dieſem erſten ſchärfern Gliede auf dieſelbe Weiſe Ebenen durch je zwei Enddiagonalen gelegt, entſteht das zweite ſchärfere Glied, es wird gebildet durch die Fläche $|\frac{1}{3}a : c : \infty b|$ (welche durch die zwei einſeitigen Diagonalen gelegt iſt) und $|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{5}b : c|$ (welche durch die zweiſeitige und ein- und einſeitige Diagonale geht). Mehr Glieder auf der ſchärfern Seite der Hauptreihe ſind beim Feldſpath nicht beobachtet, auf der andern Seite der Hauptreihe, auf der ſtumpfern, iſt das erſte ſtumpfere beobachtet. Die ſtumpfern Glieder entſtehen durch Abſtumpfung der Kanten (wie die Bedeutung der ſchärfern Glieder Abſtumpfung der Ecken ſein möchte), und zwar ſo, daß die Abſtumpfungsfläche einer Endkante durch die zwei mit ihr parallelen Seitenkanten gelegt iſt.

Die Fläche $|-a : c : \infty b|$ ſtumpft die zweiſeitige Endkante unſerer zwei- und einflächigen Pyramide ab, und $|b : c : \infty a|$ ſtumpft die ein- und einſeitigen Endkanten derſelben ab. Daß übrigens die gepaarten Flächen des erſten ſtumpfern Gliedes hier gerade aufgeſetzt ſind auf $|b : \infty a : \infty c|$, hängt von dem Fundamentalverhältniß 1 : 1 der vordern und hintern Seite ab.

Die Abſtumpfungen der Lateralkanten, durch die ihnen parallelen Endkanten gelegt, ſind die erſte Säule $|a : b : \infty c|$ und $|b : \infty a : \infty c|$; die Abſtumpfungen der Lateralecken, die durch eine Querdiagonale und die Mitte einer Endkante gehen, ſind die zweite Säule $|a : \frac{1}{3}b : \infty c|$ und $|a : \infty b : \infty c|$.

Die Fläche, die der geraden Endfläche des Rhomboeders analog wäre, müßte durch die drei Querdiagonalen gelegt werden; es iſt die Fläche $|-3a : c : \infty b|$. Verfolgen wir die bis hieher geführte Analogie unſerer zwei- und einflächigen Pyramide mit dem Rhomboeder weiter, ſo dürfen wir nun, nachdem wir die Glieder der Hauptreihe und die Endglieder des Syſtems haben kennen gelernt, nach Analoga von Drei- und Dreikantnern

Digitized by Google

fragen, und zwar werden wir zuerſt an das nächſte Glied derſelben an den metaſtatiſchen Körper denken, d. i. an dasjenige, das aus der Kantenzone des Grundkörpers zugleich in der Diagonalzone des erſten ſchärfern Gliedes liegt. Das Analogon dieſes Körpers müßte hier in drei Paare von Flächen zerfallen, und wirklich ſind auch alle drei Paare beobachtet worden. Die Flächen $\left|-a : \frac{1}{6}b : c\right|$ ſind aus der Zone der zweiſeitigen Kanten des Grundkörpers, und liegen in der Zone der einſeitigen Diagonale des erſten ſchärfern Gliedes; $\left|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c\right|$ ſind aus der ein- und einſeitigen Kantenzone des Grundkörpers und liegen zugleich in der zweiſeitigen Diagonalzone des erſten ſchärfern Gliedes, und $\left|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c\right|$ ſind aus der einſeitigen Kantenzone des Grundkörpers und zugleich aus der einſeitigen Diagonalzone des erſten ſchärfern Gliedes.

Von den drei Paaren von Flächen, die zuſammen das Analogon des metaſtatiſchen Körpers vom erſten ſchärfern Gliede der Hauptreihe bilden würden, ſind gleichfalls zwei Paare ſchon beobachtet; ſie liegen in der Kantenzone des erſten ſchärfern Gliedes, und zugleich in der Diagonalzone des zweiten ſchärfern Gliedes; es ſind die Flächen $\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b : c\right|$ und $\left|a : \frac{1}{12}b : c\right|$; das Paar aus der einſeitigen Kantenzone und zugleich aus der einſeitigen Diagonalzone iſt noch nicht beobachtet, ſein Ausdruck würde ſein $\left|-\frac{1}{7}a : \frac{1}{4}b : c\right|$.

Analoga von andern Drei- und Dreikantnern ſind im Feldſpathſyſtem noch nicht beobachtet, wenn nicht etwa die noch zweifelhafte Fläche $\left|a : \frac{3}{4}b : c\right|$ darauf hindeutet; ſie würde das Analogon des Drei- und Dreikantners ſein, der aus der Diagonalzone des Grundkörpers die Mitte bildet zwiſchen der erſten und zweiten Unterabtheilung, der zugleich zwiſchen der erſten Säule und der geraden Endfläche liegt.

Endlich dürften wir, ſo wie jedes Rhomboeder ſein Gegenrhomboeder hat, deſſen Flächen durch die Endecken und Mit-

Digitized by Google

ten der Lateralkanten gehen, auch hier nach dem etwanigen Gegenkörper unſerer zwei- und einflächigen Pyramide fragen, auch hierin noch die Analogie verfolgend, und überraſchend genug tritt die Fläche $\overline{|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{3}c : \infty b|}$ als die eine Fläche dieſes Gegenkörpers uns entgegen, deſſen zwei andere nicht beobachtete Flächen ſein würden $\overline{|3a : \frac{1}{2}b : c|}$.

Hiermit iſt der Kreis des Beobachteten geſchloſſen, und wir können alles, was die Beobachtung kennen gelehrt hat, zuſammenfaſſen, indem wir ſagen, es ſei beobachtet, außer dem Grundkörper, das erſte und zweite ſchärfere Glied, das erſte ſtumpfere Glied, das Analogon des metaſtatiſchen Körpers vom Grundkörper und von demſelben Körper für das erſte ſchärfere Glied zwei Paare, und endlich, außer der erſten und zweiten Säule und des Analogons der geraden Endfläche, die eine Fläche des Gegenkörpers.

Wer dieſe Betrachtung zum erſtenmal anſtellt, wird gewiß ſehr überraſcht werden, und doch iſt dieſer enge und innige, in dieſer Analogie mit den rhomboedriſchen Syſtemen ſo ſcharf hervortretende, Zuſammenhang kein anderer, als der durch die Endkantenzonen des Zwei- und Einflächners oben angegebene. Wäre Herr Prof. Mohs in dieſe unſere Betrachtung eingegangen, ſo würde er leicht, dem Princip ſeiner Bezeichnung getreu, die Glieder auf eine ihrem Zuſammenhange entſprechende Weiſe haben bezeichnen können. Die angegebenen Glieder in Beziehung auf ein Rhomboeder ſtatt der zwei- und einflächigen Pyramide würden folgende Zeichen haben:

R, $R+1$, $R+2$, $R-1$, $R-\infty$, $R+\infty$, $P+\infty$, $(R)^3$, $(R+1)^3$.

Laſſen wir nun das R zerfallen in R und r, r entſprechend dem zwei- und einflächigen Grundkörper, ſo würden die Glieder der Hauptreihe bezeichnet werden durch:

R, r, $R+1$, $r+1$, $R+2$, $r+2$, $R-1$, $r-1$.

Digitized by Google

Das Zeichen $(R)^3$ würde in $(Rr)^3$, $(rR)^3$ und $(rr)^3$ zerfallen, worin die zwei zuſammenſtehenden Buchſtaben immer die Flächen bezeichneten, die die Kante bilden, aus deren Zone die zu bezeichnende Fläche iſt, und worin der vordere von den zwei Buchſtaben (rR) die Fläche bezeichnete, über welcher die zu bezeichnende Fläche liegt, weil die Kante von rR eine ein- und einſeitige iſt, und die Flächen aus dieſer Kantenzone, die über r und über R liegen, verſchieden ſind.

Eben ſo zerfällt $(R+1)^3$ in $(rr+1)^3$, $(rR+1)^3$, $(Rr+1)^3$, wovon das Paar (Rr+1) nicht beobachtet iſt.

Ob (R+n) Vorne oder Hinten, d. h. auf der Seite, wo R+0, oder auf der andern Seite liegt, wird daraus erſehen, ob n eine gerade oder eine ungerade Zahl iſt, und davon hängt die Lage der Flächen $(rr+n)^m$, $(rR+n)^m$, $(Rr+n)^m$, ob ſie Vorne oder Hinten liegen, ab. — Die Endglieder würden ſein $R+\infty$, $r+\infty$, $R-\infty$, $P+\infty$, $p+\infty$, $p'+\infty$. Der Gegenkörper: R', r', wovon aber nur R' beobachtet iſt. So würden die beobachteten Glieder dieſe ſein: R, r, R+1, r+1, R+2, r+2, R−1, r−1, $(rr)^3$, $(rR)^3$, $(Rr)^3$, $(rr+1)^3$, $(rR+1)^3$, $R+\infty$, $r+\infty$, $p'+\infty$, $P+\infty$, $R-\infty$, R' *).

---

*) Wie dieſe Zeichen aus unſerm Schema abzuleſen ſind, zeigt Fig. 46. Durch die drei Flächenorte des Grundkörpers R, r, r wird ein zwei- und einſeitiges, d. h. ein gleichſchenkliges Dreieck beſtimmt; in der Reihe von in- und umſchriebenen Dreiecken, deren Seiten parallel mit denen von Rrr ſind, beſtimmen die Ecken derſelben die Flächenorte der Hauptreihe, ſo daß im erſten umſchriebenen Dreieck die Ecken die Flächenorte von R+1, r+1, r+1, und im erſten inſchriebenen Dreieck die Ecken die Flächenorte von R−1, r−1, r−1 ſind. Die Seiten dieſer Dreiecke ſind die Kontenzonenlinien der Glieder, deren Flächenorte in den Ecken liegen, oder die Diagonalzonenlinien der Glieder, deren Orte in den Mitten der Seiten der Dreiecke liegen.

Verlängern wir die Seite des Dreiecks (Rrr) bis ſie die Seite des Dreiecks (Rrr+2) in $(Rr)^3$ trifft, ſo iſt die Entfernung dieſes Punkts von der Mitte der verlängerten Seite die dreifache Länge der halben Seite des Dreiecks, daher die Drei in dem Zeichen $(Rr)^3$; daſſelbe gilt von $(rr)^3$, $(rR)^3$. Wäre die Seite Rr bis zum Durch-

Digitized by Google

Es kann wohl Niemand im Ernſte meinen, daß das, was hier im Syſteme des Feldſpathes nachgewieſen ſei, auch nur für dieſes gültig ſei, das könnte nur eine Unkunde von beſondern und allgemeinen Verhältniſſen in der Entwickelung kryſtalliniſcher Formen beurkunden. Wenn wir alſo dieſe Analogie mit den rhomboedriſchen Syſtemen im Gange der Ausbildung und des Zuſammenhanges auch nicht an vielen andern Syſtemen nachweiſen könnten, ſo hat ſie doch ſo viel Grund in ſich ſelber, daß ihrer Evidenz dadurch nichts abginge, daß wir ſogar, wenn wirklich zwei- und eingliedrige Syſteme in der Natur von einer ſolchen Ausbildung vorkommen ſollten, wie Herr Mohs bei der Gelegenheit der Entwickelung ſeiner allgemeinen kryſtallographiſchen Formeln in Gilb. An. 1821. das Syſtem des Datholit beſchreibt, — welches hiernach ſo ganz den Character eines zwei- und zweigliedrigen Syſtems hat, — wo aber bei der Seltenheit der Reihen von Kryſtallen dieſes Foſſils leicht ein Irrthum möglich ſein könnte, — daß wir ganz beſtimmt auf eine Unterſcheidung ſolcher Syſteme dringen müſſen von denen, deren Natur wir im Feldſpath, Piſtazit, Augit, Gyps, Sphen u. ſ. w. haben kennen gelernt.

Es wird nicht ohne Intereſſe ſein, auch im Syſtem des Piſtazit, deſſen Deutung und Entwickelung aus ſeiner verworre-

---

ſchnittspunkt der Diagonalzonen von $R+2$ in z verlängert, ſo wäre die Entfernung von $r-1$ bis z das Fünffache vnn der halben Seite des Dreiecks, daher für z das Zeichen $(Rr)^5$ ſein würde. Die Hälften der Seiten der Dreiecke ſind die Einheiten für die Entferuung eines Flächenortes in einer Kantenzonenlinie von der Mitte derſelben, welche Entfernung in dem Schema durch m in dem Zeichen $(Rr+n)^m$ angegeben wird; an der Kryſtallgeſtalt hat aber m dieſelbe Bedeutung, die Herr Mohs ihm ſonſt beilegt. Wie in zwei- und zweigliedrigen Syſtemen die Mohs'ſchen Zeichen in dem Schema abgeleſen werden, ſo auch in allen übrigen Syſtemen, ſo auch hier in der von uns vorgeſchlagenen Bezeichnungsart, was wohl dafür ſprechen möchte, daß wir dem Princip der Bezeichnungsmethode des Herrn Mohs treu geblieben ſind.

Digitized by Google

nen räthſelhaften Erſcheinung, niedergelegt in den Schriften der Berliner Acad. d. Wiſſ., wir uns zu erfreuen haben, dieſe Analogie mit den rhomboedriſchen Syſtemen zu verfolgen, die nur das in einer andern Geſtalt wiedergiebt, was ſchon lange als das Weſentlichſte im Gange der Ausbildung in den erwähnten Schriften der Berl. Acad. ausgeſprochen war. Herr Mohs hat hier die mehr in die Augen fallende Unzulänglichkeit, Naturwidrigkeit ſeiner Bezeichnungsmethode wohl ſelbſt gefühlt, aber gemeint, durch irgend eine Wendung des Syſtems dennoch es ihr angemeſſener ſtellen zu können, — denn anders können wir uns das Ignoriren dieſer ausgezeichneten Arbeit des Hrn. Prof. Weiß nicht erklären, — wenn er in ſeiner Charakteriſtik ſagt, daß das Grundoctaeder, von welchem ausgegangen werden muß, unbekannt ſei.

Außer der Verſchiedenheit in den Werthen der Dimenſionen haben die Syſteme der zwei- und eingliedrigen Abtheilung ihren eigenthümlichen Charakter der weitern Entwickelung in dem Fundamentalverhältniſſe der vordern und hintern Seite, (in dem Verhältniſſe der Sinuſſe, bei gleichen Coſinuſſen für die Neigungen der vordern und hintern ſchiefen Endfläche), das den Werthen der Dimenſionsverhältniſſe in den Ausdrücken der übrigen Glieder zu Grunde liegt. Beim Feldſpath war dieſes Fundamentalverhältniß 1 : 1, hier beim Piſtazitſyſtem iſt es 1 : 3. Daß dieſes Fundamentalverhältniß immer ein rationales ſein muß, iſt eine Entdeckung, die allein die Enträthſelung dieſer in der Erſcheinung ſo verworrenen Geſtalten möglich machte, und hat ſeinen Grund in dem allgemeinen kryſtallonomiſchen Geſetz, daß das irrationale Verhältniß nur verſchiedenen Richtungen zukömmt, daß in derſelben Richtung, wenn ſie getheilt wird, ihre Theile immer in einem rationalen Verhältniß ſtehen.

Nachdem dieſes Fundamentalverhältniß 1 : 3 beſtimmt iſt, ergiebt ſich die Beſtimmung der übrigen Glieder aus ihrem Zuſammenhang, wie er in Fig. 47. angegeben iſt, wo jeder Flächenort durch die zwei Zahlen bezeichnet iſt, die das Ver-

hält-

hältniß der Vielfachen von a : b ausdrücken, wenn c keine Vervielfachung erleidet. Die beobachteten Glieder ſind:

$\overline{|a : b : \infty c|}$ n $\overline{|a : 2b : \infty c|}$ e $\overline{|a : \infty b : \infty c|}$ r

$\overline{|b : \infty c : \infty c|}$ P $\overline{|a : \frac{1}{4}b : c|}$ d $\overline{|-\frac{1}{3}a : c : \infty b|}$ M

$\overline{|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c|}$ h $\overline{|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{8}b : c|}$ o $\overline{|\frac{1}{5}a : c : \infty b|}$ T

$\overline{|\frac{1}{5}a : \frac{1}{4}b : c|}$ u $\overline{|\frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b : c|}$ z $\overline{|\frac{1}{9}a : c : \infty b|}$

$\overline{|-\frac{1}{11}a : c : \infty b|}$ s $\overline{|-\frac{1}{11}a : \frac{1}{8}b : c|}$ x $\overline{|\frac{1}{13}a : c : \infty b|}$ l

$\overline{|\frac{1}{13}a : \frac{1}{8}b : c|}$ y $\overline{|\frac{1}{13}a : \frac{1}{16}b : c|}$ q *).

Conſtruiren wir uns hier eine zwei- und einflächige Pyramide aus den Flächen $\overline{|-\frac{1}{3}a : c : \infty b|}$ und $\overline{|a : \frac{1}{4}b : c|}$, ſo unterſcheiden wir in der Hauptreihe die Flächen des erſten ſchärfern Gliedes $\overline{|\frac{1}{5}a : c : \infty b|}$ und $\overline{|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{8}b : c|}$, und vom zweiten ſchärfern Gliede iſt die eine Fläche $\overline{|-\frac{1}{11}a : c : \infty b|}$ gleichfalls beobachtet, deſſen Paar aber, das nicht als beobachtet angegeben iſt, würde ſein $\overline{|\frac{1}{5}a : \frac{1}{16}b : c|}$.

Von ſtumpfern Gliedern der Reihe iſt nichts beobachtet; das erſte ſtumpfere Glied würde von der von Hrn. Weiß ſupponirten Endfläche $\overline{|a : c : \infty b|}$ und den Flächen $\overline{|-a : \frac{1}{2}b : c|}$ gebildet werden, ein Umſtand, der wohl verdient hervorgehoben zu werden, da durch ihn der Vergleichungspunkt mit dem Syſtem des Feldſpaths gegeben iſt. Dieſes Glied, deſſen Fundamentalverhältniß der vordern und hintern Seite 1 : 1 iſt, das beim Feldſpath der Grundkörper war, iſt hier zurückgedrängt, und ſeine Stelle ſcheint der Wichtigkeit nach das nächſte ſchärfere übernommen zu haben. Aber merkwürdig genug, obgleich dieſes Glied verdrängt zu ſein ſcheint, ſind doch ſeine Kantenzonen, und zwar die ein- und einſeitigen ausgebildet, nämlich auf der hintern Seite iſt das Glied aus ihnen, das zu-

---

*) Das Verhältniß der Dimenſionen iſt $a : b : c = \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{1}{4}} : \sqrt{\frac{1}{75}} = 1 : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{2}{75}}$.

gleich in der Diagonalzone unſers Grundkörpers liegt, und auf der vordern Seite das Glied, das zugleich in der Diagonalzone des erſten ſchärfern liegt, beobachtet, — jenes $\overline{|-\frac{1}{3}a:\frac{1}{4}b:c|}$ iſt ein Paar von dem in drei Paare zerfallenen Drei- und Dreikantner, der ein Analogon von dem mit 3fachem Coſinus aus der Endkante ſein würde $(rR-1)^3$, und dieſes $\overline{|\frac{1}{5}a:\frac{1}{4}b:c|}$ $=(Rr-1)^5$ gehört dem Körper an, der einem Drei- und Dreikantner mit 5fachem Coſinus entſprechen würde. Dieſelben zwei Glieder in Beziehung auf die ein- und einſeitigen Kantenzonen des Grundkörpers ſind beobachtet $(rR)^3=\overline{|\frac{1}{5}a:\frac{1}{8}b:c|}$ und $(Rr)^5=\overline{|-\frac{1}{11}a:\frac{1}{8}b:c|}$.

Von dem Analogon des metaſtatiſchen Körpers vom erſten ſchärfern iſt gleichfalls ein Paar Flächen beobachtet, nämlich $\overline{|\frac{1}{13}a:\frac{1}{8}b:c|}=(Rr+1)^3$; die Abſtumpfung der Kante dieſes Paars, die Fläche $\overline{|\frac{1}{13}a:c:\infty b|}$, iſt das Analogon der Abſtumpfung der ſtumpfern Endkante des metaſtatiſchen Körpers, welche beim Kalkſpath und andern rhomboedriſchen Syſtemen nicht ungewöhnlich iſt, und deren Rhomboeder Mohs Nebenreihen nennt; ihr Zeichen würde $\frac{5}{2}R+1$ ſein. Die Diagonalzone dieſer Fläche beſtimmt in der Kantenzone des Grundkörpers ein Glied, ein Paar von Flächen, welche zu einem Drei- und Dreikantner mit 7fachem Coſinus im rhomboedriſchen Syſteme gehören würden: $\overline{|\frac{1}{13}a:\frac{1}{16}b:c|}=(rR)^7$. Die Fläche $\overline{|\frac{1}{9}a:c:\infty b|}$ ſtumpft die Endkanten des nicht beobachteten Paares $(rR)^5$ ab, ihr Zeichen iſt $\frac{7}{4}R+1$.

So finden wir, dieſe Analogie mit den rhomboedriſchen Syſtemen verfolgend, keine Glieder hier, die nicht gerade die nächſten und gewöhnlichſten dort ſind. In Vergleich mit dem Syſtem des Feldſpathes ſcheint das vorzüglich als unterſcheidend und characteriſtiſch uns entgegen zu treten, daß von den Paaren der Analoga der Drei- und Dreikantner, die dort wirklich alle drei immer beobachtet ſind, hier nur einzelne vorzukom-

Digitized by Google

men ſcheinen, — was jedoch nur Mangel an hinlänglich umfaſſender Beobachtung ſein könnte. — Das Analogon der geraden Endfläche iſt nicht beobachtet, ſie würde wie beim Feldſpath ſein $\left|-3a : c \infty b\right|$. Dagegen ſcheint eine Fläche, die Hauy angiebt, und deren Ausdruck Herrn Prof. Weiß verdächtig erſcheint, ganz in der Analogie zu ſein, nämlich die Fläche $\left|-\frac{1}{17}a : \frac{1}{3}c : \infty b\right|$; es iſt die eine Fläche des Gegenkörpers des erſten ſchärfern Gliedes $= R' + 1$, wie beim Feldſpath $\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{3}c : \infty b\right|$ das Gegenſtück des Grundkörpers war *).

Fragen wir nun aber nach der Bedeutung dieſer Analogie, iſt ſie eine bloße äußere, zufällige, oder iſt ſie in einer inneren

*) Stellen wir die vorgeſchlagenen Zeichen der Flächen nebeneinander, ſo ſind es dieſe: R, r, $R + 1$, $r + 1$, $R + 2$, $(rR - 1)^3$, $(Rr - 1)^5$, $(rR)^3$, $(Rr)^5$, $(rR)^7$, $(Rr + 1)^3$, $R' + 1$, $R + \infty$, $P + \infty$, $p' + \infty$, $\frac{5}{2}R + 1$, $\frac{7}{4}R + 1$. — Wir dürfen bei dieſer Gelegenheit wohl aufmerkſam machen auf das Verhalten des Eiſenvitriol, der bis dahin für rhomboedriſch galt, bis feinere Meſſungen mit dem Reflexions-Goniometer ſeine zwei- u. eingliedrige Natur gezeigt haben, indem ſie eine Verſchiedenheit in den drei Kanten, die bis dahin für gleich galten, fanden. Die Ausbildung iſt ſo analog mit einem rhomboedriſchen Syſteme, daß es dennoch ſchwer wird, ſich zu überreden, wenn man eine Reihe von Kryſtallen vor ſich hat, daß man kein rhomboedriſches, ſondern ein zwei- und eingliedriges Syſtem vor ſich habe. Die geringe Abweichung von den Verhältniſſen eines rhomboedriſchen Syſtems, die man faſt nur für eine Perturbation anſprechen möchte, ſteht offenbar im Zuſammenhang mit der Entwickelung dieſes Syſtems, die faſt gar keinen Unterſchied von der Entwickelung eines rhomboedriſchen Syſtems erkennen läßt, — ſo daß das, was wir zuſammengehörige Paare der zwei- und einflächigen Pyramide nannten, auch wirklich in der Entwickelung hier noch beiſammen iſt. — Es iſt ſogar die Möglichkeit, einzuſehen, daß es zwei- und eingliedrige Syſteme in der Natur geben könnte, die durch Winkelmeſſungen gar nicht könnten erkannt werden, wo der qualitative Unterſchied ſich noch nicht quantitativ ausgebildet hätte, wie wir ſolche Verhältniſſe in viergliedrigen Syſtemen kennen, die qualitativ die zwei- und zweigliedrige Natur haben, wo ſich dieſe aber noch nicht in quantitativer Verſchiedenheit der Grundrichtungen ausgeſprochen hat, z. B. der Kreuzſtein.

weſentlichen Beziehung zwiſchen dieſen zwei Kryſtallabtheilungen gegründet, ſo müſſen wir allerdings behaupten, ſie iſt auf eine innere weſentliche Beziehung dieſer zwei Kryſtallabtheilungen gegründet. Der Zuſammenhang der Glieder, wie er äußerlich in der Anſchauung in beiden auf eine analoge Weiſe Statt hat, iſt innerlich durch ein Gemeinſames begründet, und dieſes Gemeinſame kann nur in den durch die Grundkörper gegebenen Richtungen geſucht werden; denn alle ſpätern Glieder ſind nur das Produkt des Conflikts dieſer Richtungen; alle weitere Entwickelung hat ihren Grund in ihnen. Da nun in unſerm Grundkörper der zwei- u. eingliedrigen Syſteme, in der zwei- u. einflächigen Pyramide, eine vollkommene Analogie in den in ihr gegebenen Richtungen mit den Richtungen der dreiflächigen Pyramide (d. i. Rhombdr.) ſtatt findet, ſo muß auch die Entwickelung der zwei- u. eingliedrigen Syſteme ganz analog ſein der Entwickelung der rhomboedriſchen Syſteme. Es iſt nur der Unterſchied im Gange der Ausbildung beider Abtheilungen möglich, daß in dem zwei- u. eingliedrigen Syſteme durch das Vorherrſchen von gewiſſen Flächen und durch das Fehlen oder Zurückgedrängtſein von andern Flächen, die im rhomboedriſchen Syſteme gleichwerthig nur zugleich ſein können, gewiſſe Richtungen der Ausbildung befördert und beſtimmt werden, die durch das Zuſammenſein derſelben weniger hervortreten. Es kömmt alſo Alles nur darauf an, mit welchem Rechte wir die zwei- und einflächige Pyramide zu dem Körper beſtimmten, der den im Syſteme liegenden Grundrichtungen entſpricht. Wir könnten uns auf die Deduction der Glieder von ihm aus berufen, aber wir müſſen auch behaupten, daß der Begriff eines zwei- und eingliedrigen Syſtems ihn fodere. Wenn nämlich eine Verſchiedenheit der vordern und hintern Seite, bei Gleichheit der rechten und linken Seite, ſtatt findet, und dieſe ſich räumlich darſtellt, ſo kann im Allgemeinen dies nur auf eine zweifache Weiſe geſchehen, entweder iſt auf der vordern Seite eine Fläche und ſind auf der hintern

Digitized by Google

zwei, oder es ſind vorne zwei Flächen, aber verſchieden von den zwei Flächen auf der hintern Seite *). —

Der erſte Fall, wo eine Fläche auf der einen Seite zweien Flächen auf der andern gegenüber ſteht, iſt der einfachſte, iſt der, zu dem die Betrachtung des Zuſammenhanges der Glieder des Feldſpathes uns auf das Beſtimmteſte führte, iſt der, der die Analogie mit den rhomboedriſchen Syſtemen bedingt, und erſcheint in der Natur überhaupt der gewöhnlichſte zu ſein, wie ſich aus ſpätern Unterſuchungen über die verſchiedenen zwei- und eingliedrigen Syſteme ergeben wird. Doch werden auch mehrere derſelben zugleich eine Deutung ihres Zuſammenhanges erlauben, die die Grundbeziehungen aller Glieder auf ein zwei- und ein- und einkantiges Octaeder zurückführt. Es wird aber hierin keine weſentliche Verſchiedenheit in den zwei- und eingliedrigen Syſtemen beruhen, keine Verſchiedenheit in der *urſprünglichen* Anlage ihrer Entwickelung, indem dieſer Unterſchied der vordern und hintern Seite, der durch das Gegenüberſtehen zweier Flächen auf der einen Seite zweien Flächen auf der andern Seite ſich ausſpricht, ſich immer zurückführen läßt auf den erſten Fall, den einfachſten, und als eine von ihm aus abgeleitete, ſich entwickelte Verſchiedenheit angeſehen werden kann. Die Ausbildung von ſolchem zwei- und ein- und einkantigen Octaeder wird dieſelbe Analogie mit der Entwickelung eines zwei- und zweikantigen Octaeders gewähren, und dieſe iſt auf dieſelbe Weiſe durch die Analogie der in beiderlei Octaeder

*) Das Hendyoeder des Hrn. *Weiß* kann in dieſem Sinne kein Grundkörper ſein, weil in ihm nicht die Richtungen gegeben ſind, die aller weitern Entwickelung zum Grunde liegen; es fehlt ihm die in einem Grundkörper der zwei- und eingliedrigen Syſteme nothwendige Beſtimmung des Verhältniſſes der vordern und hintern Seite, der Unterſchied zwiſchen vorne und hinten kann ſich geometriſch nicht ſo darſtellen, daß vorne eine Fläche und hinten keine ſei. Daß es aber wohl ſeine Bedeutung hat, die Beziehungen der im Gange der Ausbildung ſich einſetzenden Glieder auf die Endglieder des Syſtems, zwiſchen welchen ſie alle liegen, hervorzuheben, wird eine ſpäter ſich ergebende Betrachtung zeigen.

Digitized by Google

gegebenen Richtungen innerlich begründet, wie wir dies bei der zwei- und einflächigen und dreiflächigen Pyramide (Rhomboeder) geſehen haben. Wir könnten demnach ohne Gefahr, der Natur nicht zu entſprechen, eine Conſtruction des Ganges der Ausbildung von dieſem zwei- und ein- und einkantigen Octaeder aus, durch Combination der Richtungen, in welchen die in den Grundrichtungen des Syſtems thätigen Verhältniſſe in ihrem erſten räumlichen Erſcheinen ſich offenbaren, durch die Combination der in dieſem Octaeder gegebenen Richtungen unternehmen. Wir ziehen es aber vor, dieſen Gang der Ausbildung nachzuweiſen, indem wir hier vorgreifend uns auf eine Eigenſchaft des Feldſpathes beziehen, die ſpäter näher entwickelt und beleuchtet werden ſoll. Es iſt nämlich bekannt, daß der Feldſpath eben ſo oft in der Stellung gefunden wird, in welcher unſere Diagonalflächen $\boxed{a : \frac{1}{4}b : c}$ als Säulenflächen erſcheinen, und die Säulenflächen $\boxed{a : b : \infty c}$ als Endflächen, als in der Stellung, worauf dieſe Ausdrücke der Flächen ſich beziehen.

In Fig. 48. iſt die Projection der Flächenorte des Feldſpathſyſtems auf der Fläche, die ſenkrecht auf den Diagonalflächen ſteht, entworfen, ſie iſt alſo die Projection auf der geraden Endfläche dieſer Stellung. Die Anſicht derſelben überzeugt, wie hier, in ſo weit die Axenrichtung dieſer Stellung eine urſprüngliche und keine ſekundäre iſt, alle weitere Ausbildung ihre beſtimmteſte Beziehung auf ein zwei- und ein- und einkantiges Octaeder hat, das von den Flächen OO′, T, T′ (es ſind die Haüyſchen Buchſtaben der Flächen) gebildet wird. Die erſten in dieſem Octaeder gegebenen Glieder der ferneren Entwickelung ſind die Abſtumpfungen der Ecken, ſind Flächen, die durch die zweiſeitigen Endkanten, durch die einſeitigen Endkanten und durch die einſeitigen Lateralkanten beſtimmt ſind, M, P, y; — dieſe drei Flächen bilden ein Hendyoeder, ſind der Gegenkörper unſers Grundkörpers, des zwei- und ein- und einkantigen Octaeders. Durch M und P iſt die horizontale Zone beſtimmt, in ihr liegen die Abſtumpfungen der einſeitigen Lateralkanten des Grund-

Digitized by Google

körpers, die Diagonalflächen n. Das erſte ſtumpfere Glied der Hauptreihe, ein zwei⸗ und ein⸗ und einflächiges Octaeder, die Abſtumpfungen der Endkanten, wird durch u, u und x und k gebildet, das erſte ſchärfere durch v, v und q und l; vom zweiten ſchärfern, das wiederum erſter Ordnung iſt, alſo ein zwei⸗ und ein⸗ und einkantiges Octaeder, iſt das Paar d, d auf der hintern Seite beobachtet, das ihr zugehörige Paar auf der vordern Seite fehlt *). Aus den Endkantenzonen des Grundkörpers ſind die Glieder beobachtet, die zugleich in den Kantenzonen des erſten ſchärfern Gliedes liegen, nämlich aus der vordern zweiſeitigen Kantenzone s, s, aus der hintern zweiſeitigen Kantenzone z, z, aus den einſeitigen Endkantenzonen auf der vordern Seite g, g, auf der hintern Seite m, m. Es bleibt nur noch die Fläche r, welche die vordere Fläche des zweiten ſtumpf. zwei⸗ u. ein⸗ u. einflächigen Gliedes der Hauptreihe iſt. So können wir den Zuſammenhang des Beobachteten mit unſerm zwei⸗ und ein⸗ und einkantigen Grundkörper kurz ſo ausſprechen: die Endglieder des Syſtems, d. i. die vierſeitige Säule, und deren Kantenabſtumpfungen, das Analogon der geraden Endfläche, das erſte ſtumpfere Glied der Hauptreihe, das erſte ſchärfere, und vom zweiten ſchärfern das hintere Paar, und vom zweiten ſtumpfern zwei⸗ und ein⸗ und einflächigen Gliede die vordere Fläche, und aus den Endkantenzonen des Grundkörpers die Glieder, die zugleich in den Kantenzonen des erſten ſchärfern liegen **).

*) Es würde die Fläche $\overline{|-a : \frac{1}{8}b : \frac{1}{3}c|}$ ſein, und ich glaube, daß ſie wohl ſchon beobachtet iſt; Herr Prof. Weiß führt als zweifelhaft an die Fläche $\overline{|-a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c|}$.

**) Die dieſer Stellung entſprechenden Ausdrücke der Flächen ſind:

y	$\overline{\lvert a : c : \infty b\rvert}$	u	$\overline{\lvert a : \frac{1}{4}b : c\rvert}$	v	$\overline{\lvert a : \frac{1}{8}b : c\rvert}$
k	$\overline{\lvert -\frac{1}{5}a : c : \infty b\rvert}$	T	$\overline{\lvert -\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c\rvert}$	z	$\overline{\lvert -\frac{1}{3}a : \frac{1}{12}b : c\rvert}$
r	$\overline{\lvert \frac{1}{3}a : c : \infty b\rvert}$				

Digitized by Google

So kann in den zwei- und eingliedrigen Syſtemen allerdings eine Analogie mit den zwei- und zweigliedrigen Syſtemen in dem Zuſammenhange ihrer Glieder hervortreten, die aber eine ganz andere iſt als die, welche wir beim Hrn. Prof. Mohs rügen mußten, da ſie Richtungen, die nicht in dieſen Syſtemen liegen, ſupponirt, um an ſie die Deduetion der Glieder anſchließen zu können, und vernachläſſigt die Richtungen, die unmittelbar durch den Begriff eines zwei- und eingliedrigen Syſtems gegeben ſind, und auf welche alle Entwickelung deſſelben ihre Beziehung hat. Die Mohs'ſchen Zeichen werden ihrem Princip getreu, auch leicht auf dieſes zwei- und ein- und einkantige Octaeder angewandt werden können. Nennen wir die Flächen dieſes Octaeders P, P, p, p, ſo werden die Zeichen für die im Feldſpathſyſtem in der betrachteten Stellung der Pavenoer Zwillinge ſein: $0 = P$, $T = p$, $x = Pr$, $k = pr$, $u = Ppr$, $q = Pr + 1$, $l = pr + 1$, $v = Ppr + 1$, $r = Pr - 1$, $s = (P)^3$, $z = (p)^3$, $g = (Pp)^3$, $m = (pP)^3$, $y = P - \infty$, $P = Pr + \infty = pr + \infty$, $M = Ppr + \infty$, $n = (P + \infty) = (p + \infty)$.

Schließlich müſſen wir uns noch dagegen verwahren, daß dieſe Grundkörper der zwei- und eingliedrigen Syſteme nicht angeſehen werden als Hauyſche Primitivformen; es iſt in ihnen kein Erſtes, ſondern nur ein Früheres; ſie ſind nur die räumlichen Darſtellungen der thätigen Verhältniſſe in den Grundrichtungen des Syſtems, die über ihnen ſtehen, die das wahrhaft Erſte, Primitive ſind, ſie ſind nur der geometriſche Ausdruck, der ſein Geſetz in Zahl und Maaß hat. Dieſer Gegenſtand wird uns in Folgendem näher treten, wo wir unſere Betrachtung auf den Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen Syſteme, in Bezug auf die Grundrichtungen derſelben, wenden.

---

x	$\lvert \frac{1}{3}a : c : \infty b \rvert$	o	$\lvert \frac{1}{5}a : \frac{1}{4}b : c \rvert$	s	$\lvert \frac{1}{5}a : \frac{1}{12}b : c \rvert$
l	$\lvert -\frac{1}{7}a : c : \infty b \rvert$	d	$\lvert -\frac{1}{7}a : \frac{1}{8}b : c \rvert$		
q	$\lvert \frac{1}{9}a : c : \infty b \rvert$	m	$\lvert -\frac{1}{11}a : \frac{1}{4}b : c \rvert$		
		g	$\lvert \frac{1}{13}a : \frac{1}{4}b : c \rvert$		

Das Verhältniß der Grundrichtungen dieſer Stellung iſt:

$$a : b : c = \sqrt{1} : \sqrt{1} : \sqrt{\tfrac{1}{39}}.$$

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, alte Grünſtr. Nr. 18.

Digitized by Google

Berichtigungen.

Seite 3. Zeile 1. 2. 3. lies: $p'n''-p''n'$, ſtatt: $p'n''-p'n''$ ꝛc.
— 6. — 3 l. ſenkrecht auf der, ſt. auf die.
— 7. — 1 v. u. l. $\frac{mc^2}{a}$ ſt. $\frac{me^2}{a}$.
— 8. — 2 l. $\frac{1}{n}a$ ſt. $\frac{1}{m}a$.
— 9. — 9 v. u. l. in den Diagonalzonen, ſt. in der Diagonalz.
— 9. — 7 v. u. l. iſt in dieſer Fläche beſtimmt, ſt. iſt beſtimmt.
— 10. — 7 u. 14 l. $\frac{1}{n}b$ ſt. $\frac{1}{m}b$.
— 11. — 5 l. (1) ſt. 1(1).
— 11. — 3 v. u. l. den Flächenort von der geraden Endfläche und von, ſt. den Flächenort von.
— 13. — 4 l. $\overline{\left| \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a \right|}^{\,c}$ ſtatt $\overline{\left| \frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a \right|}^{\,c}$.
— 14. — 5 u. 6 l. $\frac{nc}{a'}$ ſt. $\frac{nc'}{a'}$.
— 14. — 7 v. u. l. ausgezeichneten, ſt. punktirten.
— 15. — 4 von u. l. σ, ſt. α.
— 18. — 13 l. die Diagonallinien und die durch den Mittelpunkt mit den Seiten parallel gezogenen Linien (als Octaederkantenzonen-Linien und Würfelkantenzonen-Linien.)
— 20. — 10 v. u. l. $\left| a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c \right|$ ſt. $\left| a : {}^{1}b : \frac{1}{3}c \right|$.
— 21. — 3 u. 5 fällt $\sqrt{3}$ weg.
— 23. — 10 v. u. l. unter der Vorausſetzung, ſt. da die Erfahrung ſich dahin entſchieden hat.
— 25. — 15 l. $\frac{a^2}{M^2}$ ſt. $\frac{a^2}{n^2}$.
— 30. — 18 l. $\left| \frac{1}{M}a : -\frac{1}{N}b : \infty c \right|$ ſt. $\left| \frac{1}{m}a : -\frac{1}{n}b : \infty c \right|$

Digitized by Google

Seite 31. Zeile 14 lies: $\sqrt{18}$, ſtatt: $\sqrt{15}$.

— 35. — 15 l. $\frac{\nu c}{a'}$ ſt. $\frac{\nu c}{c'}$.

— 36. — 8 v. u. l. sin : cos, ſt. cos : sin.

— 38. — 7 l. der, ſt. aller.

— 41. — 3, 5, 6, l. σ, σ', ſt. α, α'.

— 41. — 11 l. 5, ſt. s.

— 46. — 7 u. 8 v. u. l. α', β', ſt. $\alpha^{\cdot}$, $\beta^{\cdot}$.

— 46. — 5 v. u. ſchalte vor $\boxed{\tfrac{1}{3}a \overset{c}{:} \tfrac{1}{4}a}$ ein $\boxed{a \overset{c}{:} a}$

— 46. — 3 v. u. ſchalte vor $\boxed{\tfrac{1}{3}a \overset{\infty c}{:} \tfrac{1}{4}a}$ ein $\boxed{a \overset{\infty c}{:} a}$

— 54. — 16 v. u. l. Flächen, ſt. Ebenen.

— 63. — 11 v. u. l. hb′, ſt. b′.

— 64. — 6. l. — 3, ſt. 3.

— 92. — 9. v. u. l. des erſten ſchärfern, ſt. des erſten und zweiten ſchärfern.

— 96. — 11 in d. Anmerk. l. σ'' $\boxed{-\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{6}b : c}$.

— 97. — 4 v. u. in der Anmerk. l. mν ſt. mn.

— 100. — 2 l. a ſt. b und b ſt. a.

— 114. — 1 v. u. in d. Anmerk. l. 2p(n—p), ſt. 2mp(n—p).

In den Flächenausdrücken muß überall das Kolon vor ∞ geſetzt werden, wo es fehlen ſollte.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

DATE DUE

GAYLORD PRINTED IN U.S.A.

3 2044 103 125 217

Digitized by Google